ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ Δ.Ε.

ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΑΓΩΓΗΣ

«Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση»

Επιμελητές έκδοσης
Μιχάλης Κούρκουλος - Κωνσταντίνος Τζανάκης

Θεματικό Τεύχος 2014

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ Δ.Ε.

Περιοδικό ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΑΓΩΓΗΣ

Θεματικό Τεύχος 2014

«Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση»

Επιμελητές έκδοσης

Μιχάλης Κούρκουλος - Κωνσταντίνος Τζανάκης

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σχολή Επιστημών Αγωγής - Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε.
Περιοδικό "Επιστήμες Αγωγής"
Πανεπιστημιούπολη Ρεθύμνου, Ρέθυμνο 74 100 - Κρήτη
Τηλ.: 28310 - 77621, Fax: 28310 - 77550 - 77596
www.ediamme.edc.uoc.gr, E-mail: ediamme@edc.uoc.gr
www.ediamme.edc.uoc.gr, E-mail: EPISAGO@edc.uoc.gr

ISSN 1109-8740

Ιδιοκτήτης: Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης, Εργαστήριο Διαπολιτισμικών και Μεταναστευτικών Μελετών (Ε.ΔΙΑ.Μ.ΜΕ.) Πανεπιστημιούπολη Ρεθύμνου, Ρέθυμνο 74 100, Κρήτη. Τηλ. 28310 -77687, 77605, fax: 28310 -77635, 77636, www.ediamme.edc.uoc.gr

Εκδότης: Βασιλάκη Ελένη, Πρόεδρος Παιδαγωγικού Τμήματος Δ.Ε.

Εξώφυλλο - Σελιδοποίηση: Μεταξά Κωνσταντίνα, μέλος Ε.Τ.Ε.Π. Πανεπιστημίου Κρήτης, γραφίστας

ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΑΓΩΓΗΣ

Πρώην *Σχολείο και Ζωή*, με ιδρυτή τον **Ζομπανάκη Γεώργιο** (1953-1972)
Εκδότης - διευθυντής (1972-1999) **Ζομπανάκης Ανδρέας**

Έκδοση του Παιδαγωγικού Τμήματος Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Κρήτης

ΤΑΧ. ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: **ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ, ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ Δ.Ε.
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ "ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΑΓΩΓΗΣ"
Πανεπιστημιούπολη Ρεθύμνου, Ρέθυμνο 74 100 - Κρήτη
Τηλ.: 28310 - 77687, Fax: 28310 - 77636
E-mail: EPISAGO@edc.uoc.gr, www.ediamme.edc.uoc.gr

ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑΚΗ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ
Κοτρώνης Δημήτριος, e-mail: EPISAGO@edc.uoc.gr, τηλ.: 6944683566

EDUCATION SCIENCES

(Former «Sholeio kai Zoe»)

Founder: **Georgios Zombanakis** (1953-1972)
Director & Editor: **Andreas Zombanakis** (1972-1999)

Published quarterly by the Department of Primary Education University of Crete

ADDRESS: **UNIVERSITY OF CRETE, FACULTY OF EDUCATION,**
DEPARTMENT OF PRIMARY EDUCATION
MAGAZINE "EPISTIMES AGOGIS"
University Campus, 74 100 Rethymno Crete - Greece,
Tel.: 28310 - 77687, Fax: 28310 -77636
E-mail: EPISAGO@edc.uoc.gr, www.ediamme.edc.uoc.gr

SECRETARY

Dimitris Kotronis, e-mail: EPISAGO@edc.uoc.gr, mobile phone: 6944683566

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

σελ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ
των Επιμελητών της Έκδοσης

Η ιδέα της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Μαθηματική Εκπαίδευση (ΜΕ) εμφανίζεται ήδη από το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα όταν σπουδαίοι μαθηματικοί όπως οι A. De Morgan, F. Klein, H. Poincaré αναφέρονται σχετικά στο έργο τους και σημαντικοί ιστορικοί, όπως ο P. Tannery και αργότερα ο G. Loria, έδειξαν ενεργό ενδιαφέρον για το ρόλο που η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να διαδραματίσει στην Μαθηματική Εκπαίδευση. Όμως μια πιο συστηματική ανάπτυξη της ιδέας αυτής εμφανίζεται από τα τέλη της δεκαετίας του 1960 και εξής, όταν διάφορες εκδοχές της αρχίζουν να εφαρμόζονται στην πράξη με ποικίλους τρόπους, έτσι ώστε τα τελευταία 40 χρόνια περίπου να διαμορφωθεί σταδιακά ένας ενεργός ερευνητικός κλάδος της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που πήρε συγκεκριμένη μορφή με την ίδρυση και ανάπτυξη της *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*, της γνωστής ως ομάδας *HPM*, με δημοσιεύσεις ερευνητικών άρθρων, διοργάνωση σχετικών συνεδρίων, έκδοση συλλογικών τόμων κλπ.[1] Η ομάδα αυτή, που δημιουργήθηκε το 1972 κατά την διάρκεια του *2nd International Congress on Mathematical Education* (ICME 2) στο Exeter της Μ. Βρετανίας είναι μία από τις δύο βασικότερες και παλαιότερες ομάδες μελέτης που τελούν υπό την αιγίδα της *Διεθνούς Επιτροπής για την Μαθηματική Εκπαίδευση* (ICMI: *International Commission on Mathematical Instruction*[2]), έχοντας διατυπώσει τους βασικούς στόχους της εμπεριστατωμένα ήδη από το 1978[3].

Δίνοντας έμφαση στην ενσωμάτωση της ιστορίας και της επιστημολογίας των Μαθηματικών κατά την διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών συνιστά ένα φυσιολογικό τρόπο έκθεσης των Μαθηματικών εν τη γενέσει τους, σε τρόπον ώστε να οδηγείται κανείς σε πληρέστερη κατανόηση συγκεκριμένων μαθηματικών θεμάτων αλλά και σε μια βαθύτερη αντίληψη του τί είναι τα Μαθηματικά συνολικά ως επιστημονικό πεδίο. Τούτο είναι σημαντικό καθώς βοηθά να συνειδητοποιήσει κανείς ότι τα Μαθηματικά είναι αποτέλεσμα συνεισφορών από πολλές και διαφορετικές παραδόσεις· βρισκόταν ανέκαθεν σε ένα συνεχή διάλογο με τις άλλες επιστήμες, την φιλοσοφία, τις τέχνες και την τεχνολογία· έχουν υποστεί πολλές αλλαγές μέσα στον χρόνο τόσο ως προς το επιστημονικό τους περιεχόμενο, όσο και ως προς το τί νοείται ως Μαθηματικά· αποτελούν ένα σταθερά καθοριστικό παράγοντα υποστήριξης της επιστημονικής, τεχνικής, καλλιτεχνικής και κοινωνικής εξέλιξης.

Οι ερευνητικές και διδακτικές προσπάθειες προς αυτή την κατεύθυνση έχουν οδηγήσει σε μεγάλη ποικιλία πειραματικών ευρημάτων, τον σχεδιασμό και την παραγωγή διδακτικού υλικού για τους μαθητές και επιμορφωτικού υλικού για τους εκπαιδευτικούς και την ανάπτυξη θεωρητικών ιδεών για την συστηματοποίηση όλων των ανωτέρω προς όφελος της διδακτικής και ερευνητικής κοινότητας. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να αποκτήσει μια εικόνα σε σχέση και με τις πιο πρόσφατες εξελίξεις στον τομέα αυτό μέσω της συνοπτικής βιβλιογραφίας στο τέλος του παρόντος εισαγωγικού σημειώματος, η οποία είναι σχετικά εύκολα προσβάσιμη και βάσει της οποίας μπορεί να αναζητήσει μια μεγαλύτερη και συνάμα πιο εξειδικευμένη βιβλιογραφία στα αγγλικά και ελληνικά.

Έχοντας ως στόχο να γνωστοποιήσουμε στην ευρύτερη ελληνική Παιδαγωγική Κοινότητα το σύγχρονο αυτό πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, στο παρόν αφιέρωμα του περιοδικού *Επιστήμες της Αγωγής* συμπεριλάβαμε και επιμεληθήκαμε εργασίες ελλήνων αλλά και ξένων ερευνητών, με την ελπίδα ότι τόσο τα ίδια τα κείμενα, όσο και η σε αυτά αναφερόμενη περαιτέρω βιβλιογραφία θα αποτελέσουν κίνητρο και οδηγό για τους αναγνώστες να προβληματιστούν και ενδεχομένως να ασχοληθούν ερευνητικά και διδακτικά με την διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας και Επιστημολογίας των Μαθηματικών.

Επιλέχθηκαν πέντε κείμενα ελλήνων συγγραφέων και τέσσερα ξένων γραμμένων στα αγγλικά με περίληψη στα ελληνικά.

Στα τρία πρώτα κείμενα γίνεται εμπεριστατωμένη αναφορά μεταξύ άλλων και σε γενικότερες ιδέες και μεθοδολογικές προσεγγίσεις που έχουν διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην μορφοποίηση του θεωρητικού υποβάθρου για την εισαγωγή και ανάπτυξη μιας ιστορικής διάστασης στην Μαθηματική Εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα:

Το άρθρο του **Γιάννη Θωμαΐδη** είναι μια εμπεριστατωμένη θεωρητική σύνθεση και επισκόπηση των παραγόντων που αφορούν στην αξιοποίηση της Ιστορίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών καθώς και της σχετικής διδακτικής έρευνας, δίνοντας έμφαση στην περίπτωση της Άλγεβρας. Η εργασία συνεισφέρει στο να διαμορφώσει ο αναγνώστης μια συνολική θεώρηση του θέματος.

Στο άρθρο της, η **Tinne Kjeldsen** εξετάζει τον συνδυασμό της διερευνητικής προσέγγισης και της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία με φοιτητές των Μαθηματικών, καθώς και τις επιδράσεις αυτής της διδακτικής προσέγγισης όσον αφορά στην βαθύτερη κατανόηση από τους φοιτητές της ίδιας της φύσης των Μαθηματικών. Εξετάζει επίσης, τις επιδράσεις αυτής της διδακτικής προσέγγισης σχετικά με τις δυνατότητες των φοιτητών - μελλοντικών καθηγητών να διδάξουν σε μαθητές. Ειδικότερα, παρουσιάζει το πρόγραμμα σπουδών στο Πανεπιστήμιο Roskilde της Δανίας που εστιάζεται στην υλοποίηση projects προσανατολισμένων στην επίλυση προβλημάτων και δίνει δύο τέτοια παραδείγματα, καθώς και ένα παράδειγμα εφαρμογής της προσέγγισης αυτής σε σχολική τάξη Λυκείου.

Στο άρθρο του ο **Man Keung Siu** μετά από μια σύντομη, αλλά περιεκτική αναφορά στην προσέγγιση θεμάτων της Μαθηματικής Εκπαίδευσης μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών, αναλύει τις σχετικές επιμορφωτικές δραστηριότητες μιας ομάδας καθηγητών και στελεχών της εκπαίδευσης στην Κίνα (Hong Kong) με αντικείμενο την Ιστορία των Μαθηματικών και την αξιοποίησή της στην εκπαίδευση. Στις δραστηριότητες αυτές δίνεται έμφαση στη συγκριτική θεώρηση της εξέλιξης των Μαθηματικών στον αρχαίο Ανατολικό και στον Δυτικό κόσμο.

Στα υπόλοιπα πέντε κείμενα συζητούνται επί μέρους ερευνητικά θέματα στην περιοχή αυτή. Τα κείμενα παρουσιάζονται ανά βαθμίδα εκπαίδευσης, αρχίζοντας από την πρωτοβάθμια.

Στην εργασία του **Ματθαίου Αναστασιάδη** με τον **Κώστα Νικολαντωνάκη** αναλύεται μια πειραματική διδασκαλία με μαθητές ΣΤ′ τάξης Δημοτικού Σχολείου για τα ισοπεριμετρικά σχήματα και τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού, στην οποία χρησιμοποιήθηκαν πρωτότυπες ιστορικές πηγές και ειδικότερα, κατάλληλα μεταφρασμένα αποσπάσματα από το Ε′ Βιβλίο της *Μαθηματικής Συναγωγής* του Πάππου ($4^{ος}$ μ.Χ. αιώνας) και τις *Ιστορίες* του Πολυβίου ($2^{ος}$ π.Χ αιώνας). Το άρθρο, πέραν του ειδικού του ενδιαφέροντος, αναδεικνύει τις δυνατότητες που προσφέρει η κατάλληλη διδακτική αξιοποίηση ιστορικών πηγών στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο επίπεδο του Δημοτικού Σχολείου.

Στην εργασία του ο **Βαγγέλης Παναγιώτου** παρουσιάζει την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του λογαρίθμου και μία διδακτική ακολουθία βασισμένη σε αυτήν, η οποία έχει εφαρμοστεί δύο φορές σε Β′ τάξη ελληνικού Λυκείου. Πρόκειται για ένα θέμα – «πρόκληση» καθώς αφορά μία μαθηματική έννοια, η οποία ενώ είναι σήμερα πολύ χρήσιμη και σημαντική, εμφανίζεται αφ′ ενός μεν σε μια μορφή αφηρημένη, αφ′ ετέρου δε εντελώς διαφορετική από εκείνη που είχε αρχικά ($16^{ος}$-$17^{ος}$ αιώνας) και η οποία υπήρξε καθοριστική για την διατύπωση και επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων πολύ διαφορετικών από εκείνα στα οποία χρησιμεύει σήμερα.

Το άρθρο του **Adriano Demattè** με την **Fulvia Furinghetti** εξετάζει πλεονεκτήματα και δυσκολίες της λεγόμενης «ερμηνευτικής προσέγγισης» στην αξιοποίηση της Ιστορίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα μιας σχετικής πειραματικής διδασκαλίας σε τελειόφοιτους μαθητές ιταλικού Λυκείου θεωρητικής κατεύθυνσης, πάνω στην έννοια της συνάρτησης και ειδικότερα στην εκθετική και την λογαριθμική συνάρτηση, κατά την οποία χρησιμοποιήθηκαν πρωτότυπες ιστορικές πηγές (κείμενα του L. Euler – $18^{ος}$ αιώνας - στα λατινικά). Η εργασία συνεισφέρει στην διερεύνηση της αποτελεσματικότητας, αλλά και των περιορισμών στην διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία των Μαθηματικών και αποτελεί, στο ίδιο πλαίσιο, μια διαφορετική προσέγγιση από εκείνην του άρθρου του Ε. Παναγιώτου, της ίδιας μαθηματικής έννοιας (εκείνης του λογαρίθμου).

Στο άρθρο του **Μιχάλη Κούρκουλου** με τον **Κωνσταντίνο Τζανάκη** αναλύεται μια πειραματική διδασκαλία με φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος όπου, με την χρήση κειμένων του A. Quetelet, Βέλγου μαθηματικού του 19ου αιώνα και πρωτοπόρου της εφαρμογής στατιστικών μεθόδων στις Κοινωνικές Επιστήμες, εξετάζεται η ενσωμάτωση μακροσκοπικών εμπειρικών στοιχείων (στατιστικών στοιχείων) στη φιλοσοφική συζήτηση για την ελεύθερη βούληση του ανθρώπου. Η εργασία πέραν του ειδικού της ενδιαφέροντος αναδεικνύει τις δυνατότητες που προσφέρει η κατάλληλη διδακτική αξιοποίηση υπαρχόντων ιστορικών δεσμών μεταξύ στατιστικής, πιθανοτήτων και φιλοσοφίας ακόμη και με φοιτητές που διαθέτουν πολύ λίγες βασικές γνώσεις στατιστικής.

Το άρθρο του **Uffe Jankvist** είναι πλούσιο σε πληροφορίες και ιδέες σχετικά με το θεωρητικό πλαίσιο που αποτελεί το υπόβαθρο μιας προσέγγισης στην διδασκαλία των Μαθηματικών, η οποία αξιοποιεί ουσιωδώς την Ιστορία των Μαθηματικών, συνδυαστικά και συμπληρωματικά με φιλοσοφικά ζητήματα για τα Μαθηματικά τα ίδια, αλλά και τις εφαρμογές τους. Στο πλαίσιο αυτό, το κείμενο εξετάζει την διδακτική έρευνα του συγγραφέα με προπτυχιακούς φοιτητές Μαθηματικών και χρήση πρωτότυπων πηγών στην περιοχή των Διακριτών Μαθηματικών και της Θεωρίας Γραφημάτων με ανάλυση περίπτωσης ενός προπτυχιακού φοιτητή που μελέτησε εκτενώς τέτοιες πηγές.

Τέλος στο άρθρο του ο **Θόδωρος Πάσχος** περιγράφει ένα διδακτικό πείραμα με πρωτοετείς φοιτητές Τμήματος Μαθηματικών για την διδασκαλία βασικών θεμάτων του Απειροστικού Λογισμού, αξιοποιώντας πρωτότυπα κείμενα σχετικά με την κίνηση και την ελεύθερη πτώση των σωμάτων, τόσο του Γαλιλαίου, όσο και σημαντικών προδρόμων του κατά τον ύστερο Μεσαίωνα, όπως ο W. Heytesbury, ο N. Oresme κ.α. Τα θέματα που πραγματεύεται ο συγγραφέας και τα πρωτότυπα κείμενα που χρησιμοποιεί έχουν παίξει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της Δυτικοευρωπαϊκής Επιστήμης, τόσο των Μαθηματικών όσο και της μέσω αυτών περιγραφής της φύσης, δηλ. της Φυσικής όπως τούτη γίνεται αντιληπτή από τον Γαλιλαίο και τον Νεύτωνα και εξής.

Μιχάλης Κούρκουλος

Κωνσταντίνος Τζανάκης

Βιβλιογραφία

Ο αναγνώστης μπορεί να αποκτήσει πληρέστερη εικόνα της ευρύτερης περιοχής στην οποία αναφέρονται τα άρθρα του παρόντος τεύχους μέσω της παρακάτω βιβλιογραφίας - κυρίως συλλογικών έργων - και η οποία κατά το μεγαλύτερο μέρος είναι σχετικά εύκολα προσβάσιμη και ταυτόχρονα υποβοηθητική στην αναζήτηση περισσότερων και πιο εξειδικευμένων αναφορών, τόσο πρόσφατων, όσο και προ του 2000. Η βιβλιογραφία είναι μετά το 2000 και αναφέρεται χρονολογικά.

Fauvel, J.G., van Maanen, J. (eds) (2000) *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, New ICMI Study Series, vol.6, Kluwer Academic Publishers (2000).

Katz V. (ed.) (2000) *Using history to teach Mathematics: An international perspective*, MAA Notes vol.51, The Mathematical Association of America, Washington DC.

Gulikers, I., Blom K. (2001) 'A Historical Angle', A Survey of Recent Literature on the Use and Value of the History in Geometrical Education, *Educational Studies in Mathematics* 47, 223–258.

Bekken, O., Mosvold, R. (eds) (2003) *Study the masters: the Abel-Fauvel conference*. NCM, Göteborg.

Katz V., Michalowicz, K.D. (eds) (2004) *Historical modules for the teaching and learning of mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington, DC.

Siu, M-K., Tzanakis, C. (eds) (2004) The role of the History of Mathematics in Mathematics Education, τεύχος-αφιέρωμα, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* special double issue, vol 3, Nos 1-2.

Shell-Gellasch, A., Jardine D. (eds) (2005) *From calculus to computers: using the last 200 years of mathematics history in the classroom*, MAA Notes vol.68, The Mathematical Association of America, Washington, DC.

Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν., Τζανάκης, Κ. (επιμ.) (2006): *Ιστορία & Μαθηματική Εκπαίδευση*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Knoebel, A., Laubenbacher, R., Lodder, J., Pengelley, D. (2007) *Mathematical masterpieces –further chronicles by the explores*, Springer, New York.

Furinghetti, F., Radford, L., Katz V. (eds) (2007): The history of Mathematics in Mathematics Education: Theory and Practice, τεύχος-αφιέρωμα, *Educational Studies in Mathematics,* vol.66 No 2

Jankvist, U. T. (2009) A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 71(3), 235–261.

Jankvist, U. T. (2009) On empirical research in the field of using history in Mathematics education, *Revista Latinoamericana de Investigation en Mathematica Educativa*, vol. 12(1), σελ 67-101.

Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών (επιμ.) (2009): *Η Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Kjeldsen, T.H. Jankvist, U.T. (2011) New Avenues for History in Mathematics Education: Mathematical Competencies and Anchoring, *Science & Education*, 20(9), 831-862.

Katz, V., Tzanakis, C. (eds) (2011): *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*, MAA Notes vol.78, The Mathematical Association of America, Washington DC.

Sriraman, B. (ed) (2012) *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*, The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education, monograph vol. 12, Information Age publishing Inc., Charlotte NC.

Barbin, E., Tzanakis, C. (2014) History of Mathematics and Education in S. Lerman (ed), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer (ISBN: 978-94-007-4977-1 Print; 978-94-007-4978-8 Online); pp.255-260 (βλ. και http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/HistoryMath&Edu1.pdf)

Επίσης ο αναγνώστης μπορεί να λάβει υπ' όψιν του και τα ακόλουθα:

(α) Υπάρχουν χρήσιμες πληροφορίες και υλικό στην ιστοσελίδα της *HPM Group*: http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/

(β) Προγραμματίζονται για το 2016 δύο διεθνή συνέδρια:

- ***13th International Congress on Mathematical Education - ICME 13***

  24-31 Ιουλίου 2016, Αμβούργο, Γερμανία http://www.icme13.org/
  Στο πλαίσιο του οποίου συμπεριλαμβάνεται και το
  Topic Study Group 25: **The role of History of Mathematics in Mathematics Education**
  βλ. σχετικά http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_25.pdf ,
  http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/TSG25-ICME13-CallForSubmissions.pdf

- ***HPM 2016: History and Pedagogy of Mathematics - The HPM Satellite Meeting of ICME 13***

  Montpellier, Γαλλία, 18-22 Ιουλίου 2016.
  βλ. σχετικά http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/HPM%C2%A02016%20First%20announcement%20_Final.pdf , http://hpm2016.sciencesconf.org

Σημειώσεις

1. Μια εμπεριστατωμένη καταγραφή των ερευνητικών πορισμάτων στην περιοχή αυτή μέχρι το 2000 που έπαιξε έκτοτε καθοριστικό ρόλο στην περαιτέρω επιστημονική ανάπτυξη της περιοχής αυτής, αποτελεί ο συλλογικός τόμος J. G. Fauvel & J. van Maanen (eds), "*History in Mathematics Education: The ICMI Study*", "New ICMI Study Series", vol.**6,** Kluwer Academic Publishers (2000).

2. Ο διεθνής αυτός οργανισμός προήλθε από μια πρόταση του D.E. Smith το 1905 στο *L'enseignement mathématique*, ιδρύθηκε το 1908 στο International Congress of Mathematicians στην Ρώμη και αναδιαρθρώθηκε το 1952, είχε δε ως πρώτο πρόεδρο τον σπουδαίο γερμανό μαθηματικό F. Klein. Σήμερα αποτελεί τον κυριότερο και μεγαλύτερο διεθνή επιστημονικό φορέα σχετικό με την Μαθηματική Εκπαίδευση με πολλές και ποικίλες σημαντικές δραστηριότητες, μεταξύ των οποίων και το ανά τετραετία *International Congress on Mathematical Education –ICME*. Το επόμενο γίνεται στο Αμβούργο 24-31/7/2016.

3. *Historia Mathematica* **5**, 1978, 76. Για πληρέστερη περιγραφή της ιστορίας της ομάδας *HPM* βλ. το κείμενο των J.G. Fauvel & F. Fasanelli στο http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/HPMhistory.PDF

FORWARD

Integrating History of Mathematics in Mathematics Education has been advocated since the second half of the 19^{th} century, when great mathematicians like A. De Morgan, H. Poincaré, F. Klein and others explicitly supported this path and important historians like P. Tannery and later G. Loria showed an active interest on the role History of Mathematics can play in education. At the beginning of the 20^{th} century, this interest was revived as a consequence of the discourse and the related debates on the foundations of mathematics. Later on, history became a resource for the various epistemological approaches, like Bachelard's historical epistemology, Piaget's genetic epistemology, and Freudenthal's phenomenological epistemology, at the same time stimulating the formulation of specific ideas and conclusions on the learning process.

This interest became stronger and more competitive in the period 1960-1980 in response to the "New Math" reform, when its proponents were strongly against "a historical conception of math education", whereas, for its critics, history appeared like a "therapy against dogmatism," conceiving mathematics not only as a language but also as a human activity. In 1969, the *National Council of the Teachers of Mathematics* (NCTM) in USA devoted its 31^{st} Yearbook to the History of Mathematics as a teaching tool and in the 1970s a widespread international movement began to take shape, greatly stimulated and supported by the establishment of the *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics* (the so-called *HPM Group*) affiliated to the *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), originally in 1972 during the *2^{nd} International Congress on Mathematical Education* (ICME 2) and finally in 1978[1]. Thus, during the last 40 years or so, integrating History of Mathematics in Mathematics Education has been developed as a worldwide intensively studied area of new pedagogical practices and specific research activities.

In this way, a gradually increasing awareness has emerged that since Mathematics is a human intellectual enterprise with a long history and a vivid present, mathematical knowledge is determined, not only by the circumstances in which it becomes a deductively structured theory, but also by the procedure that originally led or may lead to it, and which is indispensable for its understanding. Therefore, learning Mathematics includes not only the final "polished products" of mathematical activity, but also understanding implicit motivations, the sense-making actions and the reflective processes of mathematicians, which aim to the construction of meaning; that is, teaching mathematics should also give students the opportunity to "do mathematics". Therefore, perceiving Mathematics both as a logically structured collection of intellectual products and as processes of knowledge production, should be the core of the teaching of Mathematics. At the same time, it should also be central to the image of Mathematics communicated to the outside world.

Along these lines, putting emphasis on integrating historical and epistemological issues in Mathematics teaching and learning constitutes a possible natural way for exposing Mathematics in the making that may lead to a better understanding of specific parts of Mathematics and to a deeper awareness of what Mathematics as a whole really is. This is important for Mathematics Education, helping to realize that Mathematics is the result of contributions from many different cultures; has been in constant dialogue with other scientific disciplines, philosophy, the arts and technology; has undergone changes over time; has constituted a constant force for stimulating and supporting scientific, technical, artistic, and social development; and that throughout history there have been shifting views of what Mathematics is.

Aiming to increase the visibility of the *HPM* perspective within the Greek Educational Community, we have willingly accepted the invitation of the Editorial Board of *Education Sciences*[2], to act as guest editors of a special issue with focus on integrating *History and Epistemology in Mathematics Education*. This issue includes nine invited papers; five by Greek researchers and educators written in Greek and four by distinguished scholars in this area, written in English. Each text is accompanied by an abstract in both languages.

Among other things, the first three papers provide an overview of general ideas, conceptual frameworks and methodological schemes that have played an important role in shaping the theoretical background of introducing a historical dimension in Mathematics Education.

Yannis Thomaidis provides a well structured survey of the work done on introducing a historical perspective in Mathematics Education with emphasis on the case of Algebra.

Tinne Kjeldsen examines the possibility to establish an inquiry teaching and learning environment in Mathematics, through the History and Epistemology of Mathematics and provides relevant empirical data with Mathematics students and school teachers in Denmark.

After a concise outline of the meaning and content of a historical perspective in Mathematics Education, **Man Keung Siu** describes and analyses related activities of a group of school math teachers and educators in Hong Kong, with emphasis on a comparative study of the development of Mathematics in the Western and Eastern civilizations.

The remaining five papers discuss specific issues in this domain and are ordered according to the instructional level; from elementary school to the university.

Mathaios Anastasiadis and **Costas Nikolantonakis** provide information on an experimental teaching approach of isoperimetric problems and the relation of perimeter to area, with 6^{th}-grade students, where excerpts from Pappus and Polybius' texts have been used, appropriately adapted to the students' educational and cognitive level.

Evangellos Panagiotou gives an interesting account of the historical development of logarithmic concepts and presents a didactical sequence based on this development that has been implemented in upper high school (11th grade).

Adriano Demattè and **Fulvia Furinghetti** examine the advantages and difficulties of the *hermeneutic approach* as a way to implement history in mathematics teaching. In this context they provide results of an experimental teaching on the function concept with last-year high school students in Italy with a human sciences orientation. More specifically, it concerns the exponential and logarithmic functions, using excerpts from Euler's *Introductio in analysin infinitorum*.

These two papers consider the same mathematical subject from different perspectives, thus nicely complementing each other.

Michael Kourkoulos and **Constantinos Tzanakis** analyze their experimental teaching of prospective elementary school teachers on using statistical data in the context of the philosophical debate on the existence of human free will and its limitations imposed by social conditions and factors. To this end, texts of the 19th century Belgian pioneer statistician A. Quetelet have been used, that reveal the didactically beneficial interrelation between statistics and philosophy.

Uffe Jankvist's paper is informative and rich in ideas on the theoretical background of a historically oriented approach to the teaching of Mathematics, which touches upon philosophical issues on both the nature of Mathematics itself and its applications. The paper informs about the author's empirical research to identify long-term effects that an exposure to primary historical sources may have on mathematics students, in the context of a teaching module on *Graph Theory*.

Finally, **Theodorus Paschos** describes a didactical experiment with first-year mathematics students on the *Fundamental Theorem of Calculus*, based on original texts by Galileo and his late Middle Age predecessors, like W. Heytesbury, N. Oresme etc.

For the interested reader's convenience and further orientation, a concise bibliography, mainly of collective works, is provided at the end of the Greek version of the present introduction (see pp.4-6).

Michael Kourkoulos

Constantinos Tzanakis

Σημειώσεις

1. *Historia Mathematica* 5, 1978, 76.
2. *Education Sciences* (in Greek: "*Επιστήμες Αγωγής*") is the oldest Greek scientific journal in the domain of the Science of Education. For the last 14 years it has been published by the *Faculty of Education* of the University of Crete.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΝΟΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΘΕΜΑ: «ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΟΥΣ»

Γιάννης Θωμαΐδης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Κιλκίς, Λαγκαδά & Ωραιοκάστρου

Abstract

In this paper a number of theoretical principles on the relation between the historical evolution of mathematical ideas and the teaching and learning process of mathematics are critically analyzed and discussed. These principles are drawn from broader theoretical schemata developed in the field of mathematics education research; for a more specific analysis an attempt is made to examine the relation between the historical evolution of basic algebraic ideas and research results on the teaching and learning of school algebra. This paper has been used as the theoretical framework for a postgraduate course on the didactical application of the history of mathematics.

Keywords

History of Mathematics, Mathematics' Education, Historical parallelism, Algebra.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή αναλύονται και εξετάζονται κριτικά ορισμένες θεωρητικές αρχές για τη σχέση της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών με τη διαδικασία της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών. Οι αρχές αυτές αντλούνται μέσα από ευρύτερα θεωρητικά σχήματα που έχουν αναπτυχθεί στο πλαίσιο των ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών για μια πιο εξειδικευμένη ανάλυση επιχειρείται η εξέταση της σχέσης ανάμεσα στην ιστορική εξέλιξη βασικών αλγεβρικών ιδεών και σε ερευνητικά αποτελέσματα που αφορούν τη διδασκαλία και μάθηση της σχολικής άλγεβρας. Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας έχει χρησιμοποιηθεί ως θεωρητικό πλαίσιο ενός μεταπτυχιακού μαθήματος για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά

Ιστορία Μαθηματικών, Διδακτική Μαθηματικών, Ιστορικός παραλληλισμός, Άλγεβρα.

0. Εισαγωγή

Οι συζητήσεις για τη σχέση ανάμεσα στην Ιστορία των Μαθηματικών και τη μαθηματική εκπαίδευση εμφανίζονται από τις αρχές του 20ου αιώνα με όρους ενός «παραλληλισμού» και με πρόθεση να συμβάλουν στη βελτίωση της διδασκαλίας και μάθησης. Αυτή η έννοια του «παραλληλισμού» στηρίχτηκε σε μια μεταφορά, στο χώρο της εκπαίδευσης, του λεγόμενου «βιογενετικού νόμου» του Ernst Haeckel (1834–1919) σύμφωνα με τον οποίο η οντογένεση (δηλαδή η ανάπτυξη ενός οργανισμού), είναι μια βραχεία επανάληψη ή ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης (δηλαδή της εξέλιξης του αντίστοιχου γένους). Η μεταφορά χρησιμοποιήθηκε αρκετές φορές από εξέχοντες μαθηματικούς[1] για να υποστηριχτεί ότι αν η γνωστική ανάπτυξη ενός ατόμου ανακεφαλαιώνει την ανάπτυξη του ανθρώπινου γένους, τότε θα πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών να ακολουθεί κατά κάποιο τρόπο την ιστορική τους πορεία και να ενσωματώνει στοιχεία της τελευταίας.

Στην κατεύθυνση αυτή έχουν υπάρξει σημαντικές εξελίξεις, που εκτείνονται από την ανάπτυξη μιας ορθολογικής βάσης για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, μέχρι και συγκεκριμένες προτάσεις «γενετικών» μεθόδων διδασκαλίας και παραγωγή διδακτικού υλικού. Παράλληλα όμως έχουν διατυπωθεί αμφιβολίες για τη δυνατότητα λειτουργικής ένταξης ιστορικών στοιχείων στην τρέχουσα πρακτική της σχολικής τάξης των Μαθηματικών. Σημαντικότερο έργο στο οποίο καταγράφονται όλες οι παραπάνω εξελίξεις θεωρείται μέχρι σήμερα ο συλλογικός τόμος *History in Mathematics Education*, που εκδόθηκε στη σειρά μελετών της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (Fauvel & Maanen, 2000). Οι εργασίες που αναφέρονται σε επισκοπήσεις, αναθεωρήσεις και ειδικές πτυχές του ζητήματος συγκροτούν ήδη μια ευρεία βιβλιογραφική βάση δεδομένων, στην οποία μπορούν να γίνουν ορισμένες επιλεκτικές και απολύτως ενδεικτικές παραπομπές (Θωμαΐδης & Καστάνης 1987, Thomaidis 1991, Jahnke 1994, Otte & Seeger 1994, Fried 2001, Nooney 2002, Furinghetti & Radford 2002, Ζορμπαλά & Τζανάκης 2003, Grattan–Guinness 2005, Βερυκάκη & Καστάνης 2006, Θωμαΐδης & Τζανάκης 2006, Κολέζα 2006, ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ. 2009, Jankvist 2009, Tzanakis & Thomaidis 2012).

Εκτός από τις αναζητήσεις για «άμεση» διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται μια διαρκώς αυξανόμενη διείσδυση της τελευταίας στις έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών. Η ιστορική γνώση παρουσιάζεται ως πηγή ενόρασης για τα πολύπλοκα ζητήματα που αφορούν τη διαδικασία της μάθησης και τη φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Σ' αυτό το πλαίσιο μπορούμε να διακρίνουμε ήδη ορισμένες χαρακτηριστικές τάσεις για τον τρόπο με τον οποίο οι ιστορικές αναλύσεις μπορούν να συμβάλλουν στις έρευνες της Διδακτικής και την επίλυση των προβλημάτων που αντιμετωπίζει.

Σκοπός μας στην εργασία αυτή είναι να εξετάσουμε τις τάσεις που έχουν διαμορφωθεί, καθώς και ορισμένα μεθοδολογικά προβλήματα που προκύπτουν. Αυτά τα ζητήματα συγκροτούν τον πρώτο άξονα των διαλέξεων του μεταπτυχιακού μαθήματος «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους», το οποίο διδάσκει ο υπογράφων τα τελευταία τέσσερα χρόνια στο Τμήμα Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α. στο πλαίσιο του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών». Στην πρώτη ενότητα θα επιχειρήσουμε μια γενική επισκόπηση του ζητήματος ενώ στη δεύτερη θα εξετάσουμε ειδικότερα τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στις έρευνες που έχουν αντικείμενο τη διδασκαλία και μάθηση της σχολικής Άλγεβρας.

1. Θεωρητικές και ερευνητικές διαστάσεις του ζητήματος

Μια θεωρία μάθησης, που είχε σημαντική επίδραση στις έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών και οριοθέτησε ένα συγκεκριμένο τρόπο χρήσης της Ιστορίας, είναι εκείνη που πηγάζει από το έργο του Jean Piaget. Όπως είναι γνωστό, ο Piaget διατύπωσε τη θεωρία του για τη νοητική ανάπτυξη αντλώντας ιδέες από τη θεωρία της βιολογικής προσαρμογής και διεξάγοντας εκτεταμένα πειράματα με παιδιά. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η απόκτηση των γνώσεων και η ανάπτυξη της σκέψης είναι μια διαδικασία σταθερής αλληλεπίδρασης των παιδιών με το περιβάλλον τους, η οποία εξελίσσεται σε τέσσερα διαδοχικά στάδια από τη βρεφική ως την εφηβική ηλικία, με προοδευτική κατασκευή νοητικών σχημάτων και δομών. Η προσαρμογή στο περιβάλλον πραγματοποιείται με την επίτευξη μιας εξισορρόπησης ανάμεσα στα αποτελέσματα που παράγουν οι μηχανισμοί της «αφομοίωσης» (ενσωμάτωση της νέας γνώσης σ' ένα υπάρχον νοητικό σχήμα) και της «συμμόρφωσης» (αλλαγές στη νοητική δομή που είναι απαραίτητες για το συνταίριασμα της νέας γνώσης με τις παλιές). Η μετάβαση από ένα στάδιο στο άλλο πραγματοποιείται με το μηχανισμό της «αναστοχαστικής αφαίρεσης»[2] όπου οι ενέργειες και διαδικασίες ενός σταδίου μετασχηματίζονται σε αντικείμενα σκέψης στο επόμενο στάδιο ανάπτυξης. Αν και η θεωρία του Piaget για τη νοητική ανάπτυξη δεν αφορά άμεσα τη σχολική εκπαίδευση, ούτε συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο, εν τούτοις χρησιμοποιήθηκε ως θεωρητικό πλαίσιο πολλών ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών, καθώς και μεγάλων εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων (ιδιαίτερα την περίοδο των «Νέων Μαθηματικών»).

Εκείνο που μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα εδώ είναι ότι ο Piaget και οι συνεργάτες του επιχείρησαν να αποδείξουν ότι βασικά στοιχεία της θεωρίας, όπως τα στάδια και οι μηχανισμοί της νοητικής ανάπτυξης, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία επιστημολογικής ανάλυσης και να εντοπιστούν στην ιστορία της επιστήμης. Ιδιαίτερα αποκαλυπτικό για το συγκεκριμένο ζήτημα είναι το επόμενο απόσπασμα από το βιβλίο *Ψυχογένεση και ιστορία της επιστήμης* που έγραψε ο Piaget με το συνεργάτη του Rolando Garcia:

> «... οι πρόοδοι που έγιναν στην πορεία της ιστορίας της επιστημονικής

> σκέψης από τη μια περίοδο στην επόμενη δεν ακολουθούν, εκτός από σπάνιες περιπτώσεις, η μια την άλλη με τυχαίο τρόπο, αλλά μπορούν να διαταχθούν κατά σειρά, όπως στη ψυχογένεση, υπό τη μορφή διαδοχικών "σταδίων". Θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε, για κάθε πεδίο, τα πιο σημαντικά από αυτά τα στάδια. Για παράδειγμα, στην περίπτωση εκείνης της θεμελιώδους περιόδου στην εξέλιξη της άλγεβρας που αρχίζει με τις "ομάδες" του Galois, παρατηρούμε μια σειρά κατασκευών που δεν είναι καθόλου τυχαίες· κάθε μια γίνεται δυνατή από τις προηγούμενες και κάθε μια με τη σειρά της προετοιμάζει εκείνες που ακολουθούν. Στη γεωμετρία, δεν είναι καθόλου σύμπτωση ότι οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες εμφανίστηκαν πολύ αργότερα από τις Ευκλείδειες και ότι τα συστήματα συντεταγμένων κατασκευάστηκαν πολύ αργότερα από την ανάλυση των γεωμετρικών μορφών. Μια από τις βασικές όψεις αυτής της έρευνάς μας είναι να προσπαθήσουμε να αναγνωρίσουμε τέτοιους νόμους προόδου. Πρέπει όμως να γίνει εξαρχής φανερό με ποιο τρόπο ορίζουμε το σκοπό που θέλουμε να πετύχουμε συγκρίνοντας τέτοιες προόδους με εκείνες που παρατηρήθηκαν στη ψυχογένεση: ο σκοπός αυτός δεν είναι να δημιουργήσουμε αντιστοιχίες ανάμεσα σε ιστορικές και ψυχογενετικές ακολουθίες ως προς το **περιεχόμενο**, αλλά μάλλον να δείξουμε ότι οι **μηχανισμοί** της μετάβασης από μια **ιστορική περίοδο** στην επόμενη είναι **ανάλογοι** προς εκείνους της μετάβασης από ένα **ψυχογενετικό στάδιο** στο επόμενο.» (Piaget & Garcia 1989: 28, η έμφαση δική μας).

Στην έρευνά τους οι Piaget και Garcia υιοθετούν μια μέθοδο ανάλυσης της ιστορικής εξέλιξης ορισμένων κλάδων των Μαθηματικών και της Φυσικής, η οποία στηρίζεται στην επιλεκτική μελέτη δευτερογενούς βιβλιογραφίας και όχι ιστορικών πηγών. Με τη μέθοδο αυτή διαπιστώνουν την ύπαρξη τριών σταδίων ανάπτυξης των επιστημονικών εννοιών, και μηχανισμούς μετάβασης από το ένα στο άλλο ανάλογους προς εκείνους που παρατηρήθηκαν στις έρευνες για τη νοητική ανάπτυξη. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, αυτή η μεθοδολογία και η ιδέα των "σταδίων" της ιστορικής εξέλιξης υπήρξε ιδιαίτερα προσφιλής στους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών που επηρεάστηκαν από το έργο του Piaget.

Μια άλλη θεωρία για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, που περιλαμβάνει και έναν ιδιαίτερο τρόπο χρήσης της Ιστορίας, εντάσσεται μέσα στο πλαίσιο της λεγόμενης «Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης». Ένα βασικό «αξίωμα» της θεωρίας, που συνδέεται άμεσα με το θέμα μας, είναι η «αρχή της εκ νέου επινόησης» του Hans Freudenthal. Ο Freudenthal παρουσίασε τις βάσεις αυτής της διδακτικής θεωρίας στα βιβλία του *Mathematics as an Educational Task* (1973) και *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (1983), στο πλαίσιο μιας πολυδιάστατης ανάλυσης (μαθηματικής, ιστορικής και παιδαγωγικής) βασικών μαθηματικών εννοιών. Στο 5ο κεφάλαιο του πρώτου βιβλίου, που τιτλοφορείται «Η Σωκρατική μέθοδος», γίνεται μια αντιπαράθεση ανάμεσα στις «γενετικές» και «δογματικές» μεθόδους διδασκαλίας. Στην πρώτη κατηγορία ο Freudenthal τοποθετεί τη μαιευτική μέθοδο του Σωκράτη που εκθέτει ο Πλάτων στο διάλογο *Μένων* (την οποία χαρακτηρίζει ως ένα από τα θεμέλια της διδασκαλίας), ενώ στη δεύτερη τοποθετεί την αξιωματική παρουσίαση των Μαθηματικών στα σύγχρονα διδακτικά βιβλία (την οποία χαρακτηρίζει ως «αντιδιδακτική αντιστροφή» και αποκαλεί, ειρωνικά, «προ–Σωκρατική»). Στη συνέχεια επιχειρεί μια προβολή της Σωκρατικής μεθόδου στη σημερινή εποχή:

> «Ο Σωκράτης δεν πίστευε ότι η αληθινή γνώση πράγματι επινοείται. … Η ψυχή λόγω της προΰπαρξής της κατέχει όλη την αληθινή γνώση· ο μαθητής το μόνο που έχει να κάνει είναι να την ανακαλέσει, και το καθήκον του δασκάλου είναι να τον βοηθήσει. Η διδασκαλία συνίσταται στην καθοδήγηση του μαθητή να θυμηθεί αυτό που έχει ξεχάσει. Απόκτηση γνώσεων είναι η εκ νέου ανακάλυψη όχι εκείνων που γνώριζαν οι άλλοι πριν από μένα αλλά μάλλον εκείνα που γνώρισα ο ίδιος όταν η ψυχή μου κατοικούσε στο βασίλειο των ιδεών. Δεν είναι ανάγκη να αντιγράψουμε τα πάντα από τον Σωκράτη, ούτε να συμμεριστούμε την πίστη του στην προΰπαρξη. Αυτό που μένει τότε είναι η μάθηση με την εκ νέου ανακάλυψη, όπου τώρα **το "εκ νέου" δεν σημαίνει την προϊστορία του ανθρώπου που μαθαίνει αλλά την ιστορία της ανθρωπότητας**.» (Freudenthal 1973: 102, η έμφαση δική μας)

Τονίζοντας το γεγονός ότι η γενετική μέθοδος δεν είναι ούτε λογικο–μαθηματική, ούτε ιστορική, ούτε ψυχολογική έννοια, ο Freudenthal οριοθετεί τις χρήσεις της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών αποδίδοντας σ' αυτήν ένα ρόλο «δεξαμενής» από την οποία αντλούνται διδακτικές ιδέες και υλικό:

> «Η προτροπή να διδάσκονται οι ιδέες γενετικά δεν σημαίνει ότι αυτές πρέπει να παρουσιάζονται με τη σειρά που εμφανίστηκαν, ακόμη και όταν αποκλειστούν όλα τα αδιέξοδα και παραλειφθούν όλες οι λοξοδρομήσεις. Αυτό που επινόησε και ανακάλυψε ένας τυφλός, μπορεί κάποιος που βλέπει να πει αργότερα με ποιο τρόπο θα έπρεπε να είχε ανακαλυφτεί αν υπήρχαν δάσκαλοι που γνώριζαν αυτό που εμείς γνωρίζουμε τώρα.» (ο.π.:101)

Το νόημα της τελευταίας φράσης γίνεται πιο συγκεκριμένο παρακάτω, όταν ασκείται κριτική στο αξιωματικό στυλ παρουσίασης των Μαθηματικών (δηλαδή το τρίπτυχο «ορισμός – θεώρημα – απόδειξη»), το οποίο παρακάμπτει όλες τις προσπάθειες που προηγήθηκαν ενός μαθηματικού αποτελέσματος και δεν αναγνωρίζει καμία αναγκαιότητα αναφοράς σ' αυτές. Ο Freudenthal προτείνει, αντίθετα, ότι αυτές οι προσπάθειες πρέπει να είναι ο οδηγός κατά τη συγγραφή διδακτικών κειμένων για τα Μαθηματικά:

> «... μερικοί διδακτικά προικισμένοι συγγραφείς εκτιμούν ένα άλλο είδος αναγνώρισης. Αποκαλύπτουν πώς θα είχαν επινοήσει τα αποτελέσματα αν ήταν τόσο έξυπνοι πριν τα επινοήσουν όσο έγιναν κατόπιν. Αυτοί οι συγγραφείς ασκούν εκείνο που ονόμασα νοητικό πείραμα. Φαντάζονται ένα κάπως εξυπνότερο *Alter Ego* και το βάζουν να επινοεί το αντικείμενο εκ νέου με μια πιο πειστική, πιο χρήσιμη, και πιο ευφυή μέθοδο από εκείνη που χρησιμοποίησε το πραγματικό *Ego*. Αυτό που πρέπει να ακολουθήσουμε δεν είναι τα ιστορικά ίχνη του εφευρέτη αλλά μια βελτιωμένη και καλύτερα καθοδηγούμενη πορεία της ιστορίας.» (ο.π.: 103).

Οι προηγούμενες θέσεις του Freudenthal, χωρίς να επεκτείνονται σε ερμηνείες «παραλληλισμού» για τα ζητήματα της μάθησης,[3] έχουν σήμερα ενσωματωθεί στις θεωρητικές αρχές της λεγόμενης «αναπτυξιακής έρευνας» που διεξάγεται στο πλαίσιο της «Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης». Ο Gravemeijer, ένας εκ των διαδόχων του Freudenthal στο ομώνυμο Ινστιτούτο της Ουτρέχτης, παρουσιάζοντας τις βασικές αρχές και τα εργαλεία εκπαιδευτικού σχεδιασμού που χρησιμοποιεί η συγκεκριμένη μέθοδος έρευνας, διατυπώνει τις θέσεις αυτές ως εξής:

> «Η *αρχή της εκ νέου επινόησης* (Freudenthal 1973) μας παρέχει την κατευθυντήρια γραμμή: "Σκέψου πως θα μπορούσες να το είχες ανακαλύψει εσύ ο ίδιος". Αυτό είναι βασικά η Σωκρατική μέθοδος, αν και ο ρόλος του σπουδαστή είναι πιο ενεργητικός στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Όπως υποδηλώνει ο όρος "εκ νέου επινόηση", **η πρωτότυπη διαδικασία της επινόησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο**. Μια ανάλυση της ιστορίας των μαθηματικών θα δώσει στον σχεδιαστή πολλές πληροφορίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο σχεδιασμό μιας σειράς μαθημάτων.» (Gravemeijer 1998: 284, η έμφαση δική μας)

Στο πλαίσιο της «Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης» έχει επίσης ξεκινήσει τα τελευταία χρόνια και ένα συστηματικό ερευνητικό πρόγραμμα για το ρόλο της Ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση, με γενικό τίτλο «Μελέτες στην εκ νέου επινόηση» (Maanen 2002).

Μια άλλη θεωρία μάθησης στη Διδακτική των Μαθηματικών που οριοθετεί επίσης ένα συγκεκριμένο τρόπο χρήσης της Ιστορίας, είναι η Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων του Guy Brousseau, και ιδιαίτερα εκείνο το τμήμα της που αφορά την έρευνα των λεγόμενων «επιστημολογικών εμποδίων». Ο Brousseau μετέφερε στη Διδακτική την έννοια του «εμποδίου» που είχε εισάγει ο θεμελιωτής της επιστημολογίας

Gaston Bachelard στις μελέτες του για την εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης και ιδιαίτερα στο βιβλίο του *Ο σχηματισμός του επιστημονικού πνεύματος* (1938). Η έννοια του «εμποδίου» στηρίζεται στην υπόθεση ότι η εξέλιξη αυτή δεν είναι συνεχής ούτε αθροιστική, αλλά σημαδεύεται από αδιέξοδα και ρήξεις που καθιστούν αναγκαίο τον επαναπροσδιορισμό των θεμελίων των επιστημών. Ο Bachelard (1938/1975, σ.13) ονομάζει τις αιτίες της στασιμότητας, της οπισθοδρόμησης και της αδράνειας «επιστημολογικά εμπόδια», την εμφάνιση των οποίων θεωρεί ένα είδος λειτουργικής ανάγκης που είναι έμφυτο στην ίδια την πράξη της απόκτησης γνώσεων. Πρέπει βέβαια να αναφερθεί ότι όλα τα παραπάνω αφορούν τις Φυσικές επιστήμες, επειδή κατά τον Bachelard η εξέλιξη των Μαθηματικών δεν παρουσιάζει περιόδους λαθών. Η θέση αυτή διατυπώνεται στο βιβλίο του με κατηγορηματικό τρόπο:

> «Η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί ένα θαύμα κανονικότητας. Γνώρισε περιόδους στασιμότητας. Δεν γνώρισε όμως περιόδους λαθών. **Καμιά από τις θέσεις που υποστηρίζουμε σ' αυτό το βιβλίο δεν αφορά επομένως τη μαθηματική γνώση**. Οι τελευταίες δεν συμβιβάζονται παρά μόνο με τη γνώση του αντικειμενικού κόσμου.» (Bachelard 1938/1975: 25, η έμφαση δική μας)

Παρά αυτόν τον κατηγορηματικό αποκλεισμό της μαθηματικής γνώσης από την «εμβέλεια» της έννοιας του «εμποδίου», ο Brousseau προσπάθησε να αναπτύξει μια ορθολογική βάση για τη χρησιμότητά της στη Διδακτική των Μαθηματικών. Στις δύο βασικές εργασίες που έγραψε για το ζήτημα αυτό (Brousseau, 1983, 1989), συνδύασε τη θεωρία του Bachelard για την εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης με τη θεωρία του Piaget για τη νοητική ανάπτυξη, τονίζοντας ότι η μάθηση με προσαρμογή στο περιβάλλον προκαλείται από γνωστικές ρήξεις. Λάθη που επαναλαμβάνονται με συστηματικό τρόπο δεν οφείλονται σε έλλειψη γνώσης, αλλά στην ύπαρξη μιας γνώσης που δυσλειτουργεί και συνιστά επομένως ένα γνωστικό εμπόδιο. Αν και η σημασία της έννοιας του «εμποδίου» στη Διδακτική προκάλεσε διαμάχες και οδήγησε σε αρκετούς επαναπροσδιορισμούς, το επόμενο απόσπασμα περιγράφει ικανοποιητικά (με το χαρακτηριστικό ύφος του Brousseau) τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν μια γνώση – εμπόδιο αλλά και τη θεμελιώδη διαδικασία υπέρβασης ενός εμποδίου:

> «Το εμπόδιο έχει την ίδια φύση με μια γνώση, με αντικείμενα, σχέσεις, μεθόδους κατανόησης, προβλέψεις, με αποδεικτική δυνατότητα, ξεχασμένα συμπεράσματα, απροσδόκητες διασυνδέσεις, κ.ο.κ. Θα αντισταθεί στην προσπάθεια απόρριψης και, όπως είναι φυσικό, θα επιχειρήσει να προσαρμοστεί τοπικά, να τροποποιηθεί με το ελάχιστο κόστος, να βελτιστοποιηθεί σ' ένα συρρικνωμένο πεδίο, ακολουθώντας μια πολύ γνωστή διαδικασία συμμόρφωσης. Για τους λόγους αυτούς πρέπει να υπάρξει μια επαρκής ροή νέων καταστάσεων τις οποίες δεν μπορεί να αφομοιώσει, οι οποίες θα το αποσταθεροποιήσουν, θα το

> κάνουν αναποτελεσματικό, άχρηστο, λαθεμένο· οι οποίες καθιστούν αναγκαία την αναθεώρηση ή απόρριψή του, την περιθωριοποίησή του, την διάλυσή του, μέχρι την τελική του εκδήλωση. Επιπλέον, η υπέρβαση ενός εμποδίου απαιτεί εργασία του ίδιου είδους όπως η εφαρμογή της γνώσης, δηλαδή: επανειλημμένη αλληλεπίδραση, διαλεκτική ανάμεσα στο σπουδαστή και το αντικείμενο της γνώσης. Αυτή η παρατήρηση είναι θεμελιώδης για τον καθορισμό του τι είναι ένα γνήσιο πρόβλημα: είναι μια κατάσταση που επιτρέπει και παρακινεί αυτή τη διαλεκτική.» (Brousseau 1983/1997: 85)[4]

Ανάλογα με την προέλευσή τους ο Brousseau ταξινομεί τα γνωστικά εμπόδια σε *οντογενετικά* (που σχετίζονται με την προσωπική νοητική ανάπτυξη), *διδακτικά* (που σχετίζονται με επιλογές του εκπαιδευτικού συστήματος), *επιστημολογικά* (που σχετίζονται με την ίδια τη γνώση) και *πολιτιστικά* (που σχετίζονται με κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες). Εκείνα που μας ενδιαφέρουν άμεσα για το ζήτημα που εξετάζουμε είναι τα επιστημολογικά εμπόδια, τα οποία αποτελούν συστατικά στοιχεία της γνώσης και εμφανίζονται, κατά τον Brousseau, τόσο στο ιστορικό όσο και στο σχολικό περιβάλλον:

> «Εμπόδια πράγματι επιστημολογικής προέλευσης είναι εκείνα από τα οποία ούτε μπορούμε ούτε πρέπει να ξεφύγουμε, εξ αιτίας του εποικοδομητικού ρόλου τους στην επιζητούμενη γνώση. Αυτά μπορούν να βρεθούν στην ιστορία των ίδιων των γνώσεων. Αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει να ενισχύσουμε την επίδρασή τους ή να αναπαράγουμε στο σχολικό περιβάλλον τις ιστορικές συνθήκες κάτω από τις οποίες έγινε η υπέρβασή τους.» (Brousseau 1983/1997: 87)

Τα προηγούμενα προσδιορίζουν με αρκετή σαφήνεια το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών στη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων καθώς και το αντίστοιχο έργο των ερευνητών της Διδακτικής. Οι τελευταίοι, κατά τον Brousseau, οφείλουν:

> «α) να εντοπίζουν επαναλαμβανόμενα λάθη και να δείχνουν ότι αυτά ομαδοποιούνται γύρω από αντιλήψεις· β) να βρίσκουν εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών· γ) να συγκρίνουν τα ιστορικά εμπόδια με εμπόδια στη μάθηση και να αιτιολογούν τον επιστημολογικό χαρακτήρα τους.» (Brousseau 1989/1997: 99)

Η ανάπτυξη της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων από τον Brousseau και τους συνεργάτες του πραγματοποιήθηκε με βάση ένα λεπτομερές σχέδιο για την έρευνα της διδασκαλίας και μάθησης των δεκαδικών αριθμών. Η ιστορική εξέλιξη των δεκαδικών μελετήθηκε εξονυχιστικά για τον εντοπισμό επιστημολογικών εμποδίων, τα οποία στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν ως υλικό βάσης για το σχεδιασμό των αντίστοιχων διδακτικών καταστάσεων.

Στις εργασίες που προαναφέρθηκαν, ο Brousseau επισημαίνει πολλές φορές ότι ο μηχανισμός της απόκτησης γνώσεων μέσω της υπέρβασης επιστημολογικών εμποδίων μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο στην επιστημολογία ή την ιστορία όσο και στη μάθηση ή διδασκαλία. Σε όλες τις περιπτώσεις, υποστηρίζει, η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου εμφανίζεται θεμελιώδης στη μελέτη του προβλήματος της επιστημονικής γνώσης.

Τις προηγούμενες θέσεις του Brousseau δεν συμμερίστηκαν όλοι οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών που ασχολήθηκαν με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου. Ο κάπως ασαφής προσδιορισμός αυτής της έννοιας και ο χαρακτηρισμός της ως «εγγενούς» συστατικού της γνώσης και ως «αναπόφευκτης», οδήγησαν στο (εσπευσμένο κατά την άποψή μας) συμπέρασμα ότι η θεωρία των επιστημολογικών εμποδίων στη Διδακτική εντάσσεται μέσα στο παραδοσιακό πλαίσιο του «ιστορικού παραλληλισμού» (Radford 1997, σσ.29 κ.ε.). Η κριτική στάση απέναντι στις θέσεις του Brousseau, επισημαίνοντας ιδιαίτερα τα εμπόδια διδακτικής και πολιτισμικής προέλευσης, έφερε στο προσκήνιο την ανάγκη να επανακαθοριστεί η φύση των εμποδίων που εμφανίζονται στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών (Artigue 1992, Sierpinska 1994, ιδιαίτερα κεφ. 4 και 5). Η Artigue συγκεκριμένα, μέσα από τη μελέτη συγκεκριμένων παραδειγμάτων, έφτασε στο σημείο να υποστηρίξει ότι η ίδια γνώση-εμπόδιο που εμφανίστηκε κάποτε στην ιστορία και επανεμφανίζεται σήμερα στη διδασκαλία, οφείλεται συνήθως σε διαφορετικές αιτίες:

> «... συμβαίνει συχνά, εκείνα που έχουν προσδιοριστεί από τους ερευνητές ως επιστημολογικά εμπόδια ... να αποδεικνύεται ότι σχετίζονται στενά, κατά τη διαδικασία διδασκαλίας/μάθησης, με εμπόδια διδακτικής φύσεως ... που συνδέονται με τις επιλογές και τα χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού συστήματος.» (Artigue, 1992: 110)

Οι Θωμαΐδης (1995) και Gagatsis & Thomaidis (1995) έχουν παρουσιάσει αποτελέσματα ιστορικών και εμπειρικών ερευνών που ενισχύουν τις προηγούμενες παρατηρήσεις στην περίπτωση των εννοιών του αρνητικού αριθμού και της απόλυτης τιμής. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι ο μετασχηματισμός μιας μαθηματικής γνώσης σε αντικείμενο διδασκαλίας στο σχολείο, επηρεάζει ουσιαστικά τη λειτουργία της και τροποποιεί τη φύση των εμποδίων που σχετίζονται με την εξέλιξή της: ισχυρά διδακτικά εμπόδια παρεμβαίνουν και αλληλεπιδρούν με επιστημολογικά εμπόδια που εμφανίστηκαν στην πορεία της ιστορικής εξέλιξης.

Όλες οι προηγούμενες θεωρητικές προσεγγίσεις, συνδέοντας την ιστορική εξέλιξη των εννοιών είτε με τα στάδια και τους μηχανισμούς της νοητικής ανάπτυξης είτε με τη μάθηση μέσω της εκ νέου επινόησης είτε με την υπέρβαση επιστημολογικών εμποδίων, φέρνουν στο προσκήνιο ορισμένα κρίσιμα ζητήματα για τη σχέση της Ιστορίας των Μαθηματικών με τη μαθηματική εκπαίδευση. Παρά το γεγονός ότι αναδύονται με διαφορετικό τρόπο σε κάθε προσέγγιση, τα ζητήματα αυτά είναι σκόπιμο να τεθούν με ενιαίο και γενικό τρόπο που αντανακλά τη διαχρονική εξέλιξη αυτής της σχέσης.

Ένα τέτοιο ζήτημα συνδέεται με τον προαναφερθέντα «παραλληλισμό», ή όπως αλλιώς ορίσουμε την επιχειρούμενη συσχέτιση ανάμεσα στην ιστορική γέννηση και εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας, και τον τρόπο με τον οποίο αυτή προσλαμβάνεται από τους μαθητές σε μια σύγχρονη σχολική τάξη. Ανεξάρτητα από τις διαφορετικές αντιλήψεις για το νόημα αυτού του «παραλληλισμού», κάθε προσέγγιση αφήνει κατά την άποψή μας αναπάντητο το επόμενο ουσιώδες ερώτημα:

> *Τι ακριβώς μπορεί να σημαίνει "παραλληλισμός" ανάμεσα σ' ένα δημιουργικό (και συνήθως κορυφαίο) μαθηματικό του παρελθόντος, και ένα μαθητή που προσπαθεί σήμερα (συνήθως χωρίς επιτυχία) να μάθει Μαθηματικά;*

Το συγκεκριμένο ζήτημα έχει επανέλθει τα τελευταία χρόνια στο προσκήνιο, και στις σχετικές δημοσιεύσεις μπορεί κανείς να συναντήσει θέσεις και ερευνητικά αποτελέσματα που εκτείνονται από την κατηγορηματική απόρριψη κάθε ιδέας «παραλληλισμού», μέχρι την ανάδειξη νέων όψεων αυτής της πολυσυζητημένης ιδέας. (Furinghetti & Radford 2002, Arcavi 2004, Schubring 2004, Thomaidis & Tzanakis 2007)

Ένα άλλο κρίσιμο ζήτημα που αφορά τη σχέση Ιστορίας των Μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης είναι ο τρόπος με τον οποίο οι ερευνητές της Διδακτικής, ανεξάρτητα από τη θεωρητική προσέγγιση που ακολουθούν, χρησιμοποιούν τη μεθοδολογία και τα αποτελέσματα της ιστορικής έρευνας. Τις τελευταίες δεκαετίες, παράλληλα με τις εξελίξεις στη Διδακτική, έχουν σημειωθεί θεαματικές αλλαγές στην ιστορική προσέγγιση και ερμηνεία των μαθηματικών γνώσεων της αρχαίας εποχής, οι οποίες αφορούν κυρίως θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες και σχετίζονται άμεσα με τα ζητήματα διδασκαλίας και μάθησης. Το γεγονός αυτό θέτει ακόμη ένα ουσιώδες ερώτημα στις θεωρητικές προσεγγίσεις για τη διδασκαλία και μάθηση που χρησιμοποιούν ως εργαλείο την Ιστορία των Μαθηματικών:

> *Πόσο έγκυρη μπορεί να θεωρηθεί η γνώση που αντλεί σήμερα ένας ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών από ιστορικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις γραμμένες πριν αρκετές δεκαετίες;*

Το είδος της ιστορικής γνώσης που χρησιμοποιείται για τους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης, και ιδιαίτερα στις έρευνες της Διδακτικής, είναι ένα ζήτημα που έχει ήδη τεθεί και μάλιστα με τρόπο που εισάγει στη σχετική συζήτηση πρόσφατες εξελίξεις στο χώρο της ιστοριογραφίας των Μαθηματικών. (Fried 2001, Schubring 2004, Grattan–Guinness 2005)

Στην επόμενη ενότητα θα προσπαθήσουμε να διεισδύσουμε στον πυρήνα αυτού του ζητήματος εξετάζοντας μια συγκεκριμένη περίπτωση.

2. Ένα ειδικό πεδίο χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στις έρευνες της Διδακτικής: Η περίπτωση της Άλγεβρας

Η μελέτη των προβλημάτων που συνδέονται με τη διδασκαλία και μάθηση των βασικών αλγεβρικών εννοιών, αποτελεί μια περιοχή ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών στην οποία μπορούμε να διακρίνουμε ειδικές όψεις όλων σχεδόν των ζητημάτων που θίξαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Παίρνοντας υπόψη τις τάσεις και τα αποτελέσματα των νεότερων ιστορικών ερευνών, θα επιχειρήσουμε στην ενότητα αυτή να δείξουμε ότι η τάση ορισμένων ερευνητών της Διδακτικής να προσεγγίζουν την ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας με κανονιστικούς όρους «σταδίων ανάπτυξης» και «μηχανισμών μετάβασης», οδηγεί στη δημιουργία υπεραπλουστευμένων μοντέλων και αποτελεί σαφή αναχρονισμό.

Σημείο αφετηρίας για το ζήτημα που εξετάζουμε αποτελούν οι εργασίες του Eon Harper, ο οποίος χρησιμοποίησε την ιστορική ανάλυση ως βάση μιας εμπειρικής έρευνας στην οποία καταγράφηκαν οι τρόποι που χρησιμοποιούν μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για να λύσουν το ακόλουθο πρόβλημα:

> *Αν σας δοθεί το άθροισμα και η διαφορά δύο οποιωνδήποτε αριθμών να δείξετε ότι μπορείτε πάντοτε να βρείτε ποιοι είναι οι αριθμοί αυτοί.*

Το 42% των μαθητών έδωσε λύσεις που ταξινομήθηκαν από τον Harper (1987) σύμφωνα με μια παραδοσιακή ιστορική ερμηνεία, που διαχωρίζει την εξέλιξη της Άλγεβρας σε τρία στάδια: το *ρητορικό*, το *συγκεκομμένο* και το *συμβολικό*. Τα πρώτο στάδιο καλύπτει την περίοδο μέχρι τον Διόφαντο (περ. 250 μ.Χ.) και χαρακτηρίζεται από τον προσδιορισμό των ζητουμένων ενός προβλήματος με αποκλειστική χρήση φυσικής γλώσσας. Το δεύτερο στάδιο, που καλύπτει την περίοδο από τον Διόφαντο μέχρι το τέλος του 16^{ου} αιώνα, χαρακτηρίζεται από τη χρήση γραμμάτων για την αναπαράσταση αγνώστων και τη δημιουργία εξισώσεων. Τέλος, το τρίτο στάδιο που αρχίζει με τον Viète (1540–1603), έχει επιπλέον χαρακτηριστικό τη χρήση γραμμάτων και για την αναπαράσταση των δεδομένων ενός προβλήματος ώστε να είναι δυνατή η διατύπωση γενικών λύσεων. Ακολουθώντας αυτή τη διάκριση ο Harper ταξινομεί τις λύσεις που έδωσε το 42% των μαθητών της έρευνάς του σε «Ρητορικές», «Διοφαντικές» και «Βιετιανές». Στη συνέχεια διατυπώνει – κάνοντας μια πλάγια αναφορά στον Piaget – ορισμένες θέσεις που συνηγορούν υπέρ της ιδέας του «παραλληλισμού» και του θετικού ρόλου της ιστορικής γνώσης των Μαθηματικών στην ερμηνεία των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι σημερινοί μαθητές:

> «Από την άποψη αυτή η σειρά της απόκτησης των εννοιών δείχνει να παραλληλίζεται με εκείνη που θα αποκαλύψει μια μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών. Εδώ η μελέτη υποδεικνύει ότι σε όλες τις περιοχές των μαθηματικών υπάρχει ένα πλούσιο και ενδεχομένως αποδοτικό

> πεδίο έρευνας και ότι ο οδηγός για τη σειρά των περιεχομένων του αναλυτικού προγράμματος θα μπορούσε να αναζητηθεί σε μια ιστορική ανάλυση της εξέλιξής του. ...

Ανεξάρτητα από οποιαδήποτε θεώρηση για τη φύση της ακριβούς σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στη φυλογενετική και την οντογενετική ανάπτυξη, η ιστορική ανάλυση των μαθηματικών ιδεών μπορεί λοιπόν να μας εφοδιάσει με σημαντικές ενοράσεις για τις νοητικές δυσκολίες και ανακαλύψεις που εμποδίζουν ή προάγουν τη μαθηματική πρόοδο. Δεν χρειάζεται πολλή φαντασία για να αναγνωρίσει κανείς ότι οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν παρόμοιες δυσκολίες και ότι θα καταφέρουν να κάνουν παρόμοιες προόδους με τους μαθηματικούς της ιστορίας, των οποίων το εννοιολογικό σύμπαν διαμοιράζονται.» (Harper 1987: 85–87)[5]

Μια άλλη εργασία σχετική με το ζήτημα που εξετάζουμε δημοσιεύτηκε από την Anna Sfard το 1991. Στην εργασία αυτή η ιστορική εξέλιξη του αριθμού και της συνάρτησης χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη διατύπωση ενός θεωρητικού μοντέλου της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών κατά τη διαδικασία της μάθησης. Το μοντέλο προβλέπει την ιεραρχική εμφάνιση τριών σταδίων, που χαρακτηρίζονται αντίστοιχα ως «φάση εσωτερίκευσης» (όταν εκτελείται κάποια υπολογιστική διαδικασία με οικεία μαθηματικά αντικείμενα), «φάση σύνοψης» (όταν η διαδικασία συνοψίζεται σε πιο εύχρηστες ενότητες) και ως «φάση αντικειμενοποίησης» (όταν η διαδικασία μετασχηματίζεται σε ένα νέο και αυτόνομο αντικείμενο μελέτης). Οι δύο πρώτες φάσεις, στις οποίες κυριαρχούν διαδικασίες και αλγόριθμοι σε υποκείμενες έννοιες, ονομάζονται «εργαλειακές» ενώ η τρίτη, στην οποία αναδεικνύονται οι αφηρημένες όψεις των εννοιών, ονομάζεται «δομική». Προβάλλοντας στη συνέχεια αυτό το μοντέλο στην ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας, η Sfard επιχειρεί να εντοπίσει σ' αυτήν τα στάδια μετάβασης από τις «εργαλειακές» στις «δομικές» προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας την παραδοσιακή ερμηνεία των τριών σταδίων εξέλιξης (*ρητορικό*, *συγκεκομμένο*, *συμβολικό*):

> «Όπως παρατηρούν οι Davis και Hersh (1983, σ.182), "Τα μαθηματικά της Αιγύπτου, της Βαβυλώνας, και της αρχαίας Ανατολής ήταν όλα αλγοριθμικού τύπου... Μόνο στη σύγχρονη εποχή βρίσκουμε μαθηματικά με ασήμαντο ή καθόλου αλγοριθμικό περιεχόμενο, τα οποία θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε πλήρως διαλεκτικά ή υπαρξιακά". Πράγματι η επιστήμη του υπολογισμού, που είναι σήμερα γνωστή με το σχετικά νέο όνομά της "άλγεβρα", έχει διατηρήσει έναν ευδιάκριτα εργαλειακό χαρακτήρα για χιλιάδες χρόνια. Η λεγόμενη "ρητορική" άλγεβρα, η οποία προηγήθηκε της συγκεκομμένης και της συμβολικής άλγεβρας (η τελευταία δεν αναπτύχθηκε πριν από το 16^{ο} αιώνα) ασχολήθηκε με τις υπολογιστικές διαδικασίες καθαυτές, ενώ το μόνο αποδεκτό είδος αφηρημένων αντικειμένων ήταν οι αριθμοί. Ακόμη και οι πιο σύνθετες

> αλληλουχίες αριθμητικών πράξεων παρουσιάζονταν με τη βοήθεια λεκτικών εντολών, που είχαν έναν ευδιάκριτα επακόλουθο χαρακτήρα και δεν προκάλεσαν σύνοψη και αντικειμενοποίηση. ...

Σε ορισμένα στάδια του σχηματισμού (ή της απόκτησης) των γνώσεων η απουσία μιας δομικής αντίληψης μπορεί να εμποδίσει την παραπέρα ανάπτυξη. Καθώς η ποσότητα των πληροφοριών αυξάνεται, το παλιό σχήμα μπορεί να κορεστεί και να γίνει στην πράξη ανεπίδεκτο οποιουδήποτε εμπλουτισμού. Δεν ήταν ασφαλώς τυχαίο γεγονός ότι η μετάβαση από τη ρητορική στη συμβολική άλγεβρα – μια μετάβαση από την εργαλειακή στη δομική προσέγγιση στα υπολογιστικά μαθηματικά – εμφανίστηκε τον 16^{ο} αιώνα. Ούτε ήταν ιστορική σύμπτωση ότι σχεδόν ταυτόχρονα εφευρέθηκαν αρκετά διαφορετικά συστήματα συμβόλων από μαθηματικούς που εργάζονταν ο ένας ανεξάρτητα του άλλου. Από εκείνη την εποχή, η τεράστια πολυπλοκότητα των υπολογιστικών διαδικασιών έφερε τη ρητορική άλγεβρα σε κατάσταση αδιεξόδου και πρακτικά έβαλε ένα τέλος στην ανάπτυξή της. Κοιτώντας ακόμη πιο πίσω, μπορούμε να διακινδυνεύσουμε την εικασία ότι η απουσία δομικών αναπαραστάσεων (άρα δομικών αντιλήψεων) ήταν ένας από τους παράγοντες που επιβράδυναν την εξέλιξη της υπολογιστικής επιστήμης στην Αρχαία Ελλάδα και προκάλεσαν την υστέρηση της άλγεβρας έναντι της γεωμετρίας για αιώνες.» (Sfard 1991: 24, 29).

Το προηγούμενο απόσπασμα είναι ενδεικτικό για τη μεθοδολογία χρησιμοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών σε μια ολόκληρη σειρά εργασιών που διερευνούν τη διδασκαλία και μάθηση των αλγεβρικών εννοιών. Δευτερογενείς ή ακόμη και τριτογενείς πηγές ιστορικής πληροφόρησης (όπως το πασίγνωστο βιβλίο των Davis και Hersh *The Mathematical Experience*) χρησιμοποιούνται αποσπασματικά για τη στήριξη ενός θεωρητικού μοντέλου της μάθησης, το οποίο εν συνεχεία γίνεται και εργαλείο διατύπωσης ιστορικών ερμηνειών! Η αντίθεσή μας εδώ δεν αφορά το μοντέλο καθαυτό (και ιδιαίτερα τη δυναμική του ως εργαλείου διδακτικής ανάλυσης), αλλά τον τρόπο χρήσης των ιστορικών πηγών η οποία, εκτός από αποσπασματική, είναι και επιλεκτική:

> «Ό,τι ακολουθεί τώρα είναι μια πολύ σύντομη και με κανένα τρόπο εξαντλητική παρουσίαση της μακριάς και ταραχώδους ιστορίας μερικών από τις πιο κεντρικές μαθηματικές έννοιες. Σ' αυτή την εργασία θα ασχοληθώ μόνο με εκείνα τα ιστορικά γεγονότα και αποτελέσματα **τα οποία φωτίζουν την άποψη που θα ήθελα να τονίσω εδώ** ...»
> (Sfard 1991: 11, η έμφαση δική μας)

Το θεωρητικό μοντέλο της Sfard για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης γνώρισε ευρύτατη διάδοση στο χώρο της Διδακτικής και χρησιμοποιήθηκε σε μια σειρά εργασιών με αντικείμενο μελέτης την Άλγεβρα και την αλγεβρική σκέψη (Kieran 1994, Sfard & Linchevski 1994, Sfard 1995). Στις εργασίες αυτές, τόσο οι άμεσες αναφορές όσο και η μεθοδολογία της έρευνας μαρτυρούν την ισχυρή επίδραση του πιαζετιανού σχεδίου ταυτοποίησης των σταδίων και μηχανισμών της νοητικής ανάπτυξης στην ιστορική εξέλιξη των επιστημονικών εννοιών. Οι Piaget και Garcia (1989) προσδιορίζουν στην ιστορία της Άλγεβρας ένα μηχανισμό μετάβασης από το «ενδο-λειτουργικό» στο «δια-λειτουργικό» και τέλος στο «υπερ-λειτουργικό» στάδιο ανάπτυξης, μια ορολογία που η Sfard σπεύδει να υιοθετήσει επιχειρώντας παραλληλισμούς με το «εργαλειακό» και «δομικό» στάδιο του δικού της θεωρητικού μοντέλου (Sfard 1995: 20, 29, 33).

Το βασικό συμπέρασμα που αναδύεται από τις προηγούμενες εργασίες είναι ότι η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης ακολουθεί μια ιεραρχική δομή, στην οποία αυτό που συλλαμβάνεται εργαλειακά σε ένα επίπεδο γίνεται αντιληπτό δομικά σε κάποιο ανώτερο επίπεδο, γεγονός που αποτυπώνεται με έναν πίνακα «σταδίων εξέλιξης της άλγεβρας» (Sfard & Linchevski 1994: 203). Στον πίνακα αυτό γίνεται αρχικά διάκριση σε δύο «τύπους» (γενικευμένη αριθμητική και αφηρημένη άλγεβρα), καθένας από τους οποίους αποτελείται από δύο «στάδια» (εργαλειακό και δομικό). Για κάθε στάδιο, τέλος, αναγράφονται τα σημεία αιχμής, τα μέσα αναπαράστασης και χαρακτηριστικοί εκπρόσωποι. Για παράδειγμα, το έργο του Διόφαντου «κωδικοποιείται» ως εξής:

Τύπος:	«Γενικευμένη Αριθμητική»,
Στάδιο:	«Εργαλειακό»
Σημείο αιχμής:	«Αριθμητικοί υπολογισμοί»
Αναπαράσταση:	«Μικτή: λεκτική + συμβολική (συγκεκομμένη)».

Αυτή η κωδικοποίηση και ένταξη συνοδεύεται επίσης από ορισμένες ιστορικές ερμηνείες τις οποίες αξίζει να παραθέσουμε αυτούσιες:

> «Ο Διόφαντος δεν προχώρησε πέρα από τη χρήση των αλγεβρικών εκφράσεων στις οποίες ένα γράμμα δήλωνε μια άγνωστη αλλά σταθερή τιμή, και όπου οι αντίστοιχες εκφράσεις αντιπροσώπευαν τους αριθμούς που λαμβάνονταν συνδυάζοντας τον άγνωστο με άλλους αριθμούς. Θα υποστηρίξουμε ότι αυτό που ανέπτυξε ήταν η άλγεβρα *μιας σταθερής τιμής*, σε αντίθεση με τη *συναρτησιακή άλγεβρα*, όπου τα γράμματα αντιπροσωπεύουν μεταβαλλόμενα μάλλον παρά σταθερά μεγέθη. Η ιδέα ενός γράμματος ως μεταβλητής – ως συμβόλου στη θέση του οποίου μπορεί να αντικατασταθεί οποιοσδήποτε αριθμός – τόσο φανερή σ' εμάς σήμερα, **ουδέποτε εμφανίστηκε στον Διόφαντο**.» (Sfard & Linchevski 1994: 199, η έμφαση δική μας)

> «Υπάρχουν κάποιες ενδείξεις ότι η άλγεβρα μπορεί να εισήλθε σ' αυτή τη δομική φάση με το έργο του Διόφαντου ($3^{ος}$ αιώνας π. Χ.). Ο Διόφαντος, που χρησιμοποίησε ένα συνδυασμό συμβόλων και λέξεων και έτσι δημιούργησε τη λεγόμενη "συγκεκομμένη" άλγεβρα, έλυσε πολλούς

> διαφορετικούς τύπους εξισώσεων. ... Αλλά αυτή η περίοδος μπορεί να θεωρηθεί μόνο ένα πρώτο βήμα στην ανάπτυξη της δομικής άλγεβρας, επειδή **ο Διόφαντος δεν ανέπτυξε καθόλου γενικές μεθόδους**· κάθε ένα από τα 189 προβλήματα των Αριθμητικών του επιλύονταν με διαφορετικό τρόπο.» (Kieran 1994: 159, η έμφαση δική μας)

Την εποχή που γράφονταν αυτές οι γενικές διαπιστώσεις, η ιστοριογραφία των αρχαίων Μαθηματικών είχε ήδη πραγματοποιήσει μια θεαματική στροφή στη μεθοδολογία της έρευνας. Χαρακτηριστικό γνώρισμα της «νέας ιστοριογραφίας» είναι ότι τα αρχαία κείμενα δεν ερμηνεύονται πλέον σύμφωνα με την αντίληψη ότι αυτά περιέχουν τις πρώιμες και ατελείς μορφές των σύγχρονων μαθηματικών εννοιών. Δίνοντας απόλυτη προτεραιότητα στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τις πρακτικές κάθε αρχαίας μαθηματικής παράδοσης, η νέα ιστοριογραφική προσέγγιση ανέτρεψε για παράδειγμα την (εδραιωμένη επί δεκαετίες) ερμηνεία ότι το μαθηματικό περιεχόμενο των Βαβυλωνιακών πινακίδων αποτελεί την πρώτη εμφάνιση της στοιχειώδους Άλγεβρας, αυτής που χαρακτηρίζεται σήμερα ως «γενικευμένη Αριθμητική». Μια ριζική επανεξέταση της τεχνικής ορολογίας και της πρακτικής των γραφέων έδειξε, αντίθετα, ότι το περιεχόμενο αυτό είναι στενά συνυφασμένο με γεωμετρικές έννοιες και δραστηριότητες (Hoyrup 1990, 2002). Νεότερα επίσης αποτελέσματα για την Αιγυπτιακή, την Ελληνική, την Ισλαμική και την Κινεζική μαθηματική παράδοση, αποκαλύπτουν ισχυρές πολιτιστικές επιδράσεις και ιδιομορφίες και αναθεωρούν καθιερωμένες ερμηνείες (Chemla 2003, Imhausen 2003, Oaks & Alkhateeb 2005, Thomaidis 2005, Thomaidis 2011). Για παράδειγμα, η σύγχρονη ιστορική έρευνα προσκομίζει πολλά επιχειρήματα που δείχνουν ότι όσα επισημαίνονται στα προηγούμενα αποσπάσματα σχετικά με τον Διόφαντο αποτελούν εσπευσμένες και αφοριστικές γενικεύσεις.

Ακόμη και μια βιαστική ματιά μπορεί να δείξει την πολυπλοκότητα του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε, όταν θέλουμε να ξεδιαλύνουμε τα νήματα της ιστορικής εξέλιξης της Άλγεβρας. Ο Διόφαντος αποτελεί κεντρική μορφή αυτής της εξέλιξης αλλά αγνοούμε τη σχέση του, όχι μόνο με τις προελληνικές μαθηματικές παραδόσεις αλλά ακόμη και με την Ελληνική της κλασικής περιόδου, από την οποία το έργο του έχει εμφανώς επηρεαστεί. Στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου συναντούμε για πρώτη φορά τον ορισμό μιας έννοιας "αγνώστου" αριθμού, ένα συγκροτημένο σύστημα συμβολικής αναπαράστασης σχέσεων που περιέχουν τον "άγνωστο" και τις δυνάμεις του, και ορισμένους γενικούς κανόνες επίλυσης εξισώσεων. Όλα αυτά τα αλγεβρικά εργαλεία χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων θεωρητικής αριθμητικής στο πεδίο των θετικών ρητών αριθμών, χωρίς γεωμετρικές ερμηνείες ή πρακτικές εφαρμογές. Αν ο Διόφαντος είχε «προετοιμάσει» το δρόμο για το *Συνοπτικό Βιβλίο Υπολογισμού με Άλγεβρα και Αλμουκαμπάλα* του al–Khwarizmi, τότε η απολύτως «ρητορική», και με Ευκλειδείου τύπου γεωμετρικές ερμηνείες, άλγεβρα του τελευταίου θα είχε διαφορετική μορφή. Αντίθετα, ο al–Khwarizmi φαίνεται ότι εκπροσωπούσε στο εσωτερικό των Ισλαμικών Μαθηματικών μια παράδοση με Ινδικές ή Βαβυλωνιακές ρίζες, προσανατολισμένη προς τους αριθμητικούς υπολογισμούς και τις πρακτικές εφαρμογές (το μεγαλύτερο μέρος αυτού του βιβλίου αφιερώνεται σε προβλήματα εμπορικών συναλλαγών, μετρήσεων και κληρονομιών). Η παράδοση αυτή αναπτύχθηκε ως ένα σημείο ανεξάρτητα από το κυρίαρχο πρότυπο της «επιστημονικής γνώσης», που εκπροσωπούσαν στο Ισλάμ τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και οι μεταφράσεις τους στην Αραβική γλώσσα. Η ανάπτυξη της Άλγεβρας στη Βόρεια Αφρική και τη Δυτική Ευρώπη (όπως αποτυπώνεται π.χ. μέσα στο έργο του Fibonacci ή του Jordanus de Nemore το 13ο αιώνα) επηρεάστηκε σημαντικά από αυτή την παράδοση, μια επίδραση που φτάνει μέχρι την *Ars Magna* (1545) του Cardano. Το γεγονός όμως που λειτούργησε ως κινητήριος μοχλός για τη δημιουργία και καθιέρωση της νεότερης, συμβολικής άλγεβρας, ήταν η μεταφορά των *Αριθμητικών* του Διόφαντου από το Βυζάντιο στη Δύση και η καθοριστική επίδραση αυτού του έργου σε μαθηματικούς όπως ο Bombelli, ο Descartes και ο Viète (Juschkewitsch 1963, Waerden 1985, Flegg 1987, Hoyrup 2002).

Τα προηγούμενα[6] αναδεικνύουν κατά την άποψή μας ένα κρίσιμο μεθοδολογικό ζήτημα, που αφορά το ρόλο και τον τρόπο χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στις έρευνες της Διδακτικής και το οποίο επιχειρούμε να προσεγγίσουμε στην επόμενη ενότητα.

3. Μερικές πρόσφατες εξελίξεις και συμπεράσματα

Η ραγδαία ανάπτυξη των ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών τις τελευταίες δεκαετίες οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην υψηλή «απορροφητικότητα» εννοιών και μεθόδων από «συνοριακά» και καθιερωμένα επιστημονικά πεδία, όπως είναι η Ψυχολογία, η Παιδαγωγική, η Κοινωνιολογία, και άλλα που βρίσκονται πιο κοντά στη «μητρική» επιστήμη, όπως η Ιστορία των Μαθηματικών. Στις προηγούμενες ενότητες διαπιστώσαμε την ολοένα μεγαλύτερη διείσδυση της Ιστορίας στις έρευνες της Διδακτικής, αλλά ταυτόχρονα και το γεγονός ότι πολλοί ερευνητές της τελευταίας δεν φαίνεται να αντιλήφθηκαν έγκαιρα την παράλληλη και εξίσου σημαντική εξέλιξη των ερευνών στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών. Αυτή η κατάσταση δεν πέρασε φυσικά απαρατήρητη και τα τελευταία χρόνια πυκνώνουν στο χώρο της Διδακτικής οι αντιδράσεις και τα κριτικά ερωτήματα, καθώς και οι απαιτήσεις για νέου είδους ιστοριογραφικές προσεγγίσεις. Είναι χαρακτηριστικό ότι σε συλλογικούς τόμους με αντικείμενο τη διδασκαλία και μάθηση της Άλγεβρας έχουν δημοσιευτεί τα τελευταία χρόνια ιστορικές εργασίες που κινούνται προς αυτή την κατεύθυνση. Ορισμένες από αυτές εξετάζουν τις συνέπειες που έχει στο χαρακτηρισμό βασικών αλγεβρικών ιδεών, όπως του αγνώστου και της μεταβλητής, η ριζική αναθεώρηση της ιστορικής ερμηνείας για τη Βαβυλωνιακή άλγεβρα (Radford 1996, 2001). Άλλες επιχειρούν να επαναπροσδιορίσουν τη φύση των προβλημάτων που προκάλεσαν την ανάπτυξη της Άλγεβρας (Charbonneau 1996, Charbonneau & Lefevre 1996) ή τα επιστημολογικά εμπόδια που αναδύονται κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική επίλυση προβλημάτων (Puig & Rojano 2004). Κοινό γνώρισμα όλων αυτών των εργασιών για το ζήτημα που εξετάζουμε, είναι ότι επιχειρούν να εισάγουν στην προβληματική των ερευνών της Διδακτικής τις νέες εξελίξεις και ερμηνευτικές προσεγγίσεις που αναπτύχθηκαν στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών τις δύο τελευταίες δεκαετίες.

Οι προηγούμενες εξελίξεις υποδηλώνουν μια τάση αλλαγής: Από την αναζήτηση στην Ιστορία «μηχανισμών» και «σταδίων» που μπορούν να «παραλληλιστούν» με τη νοητική ανάπτυξη, αρκετοί ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών στρέφονται τώρα στη μελέτη του περιεχομένου της ιστορικής εξέλιξης, το οποίο συγκροτείται από ένα μεταβαλλόμενο σύστημα προβλημάτων, εννοιών και μεθόδων που προσδιορίζονται πολιτιστικά και κοινωνικά. Αυτό φαίνεται ότι είναι το είδος της ιστορικο–κριτικής ανάλυσης που ενδιαφέρει πρωταρχικά και άμεσα τη Διδακτική των Μαθηματικών (Sierpinska 1994: 121–22), αλλά δεν έχουν ακόμη διευκρινιστεί οι μεθοδολογικές βάσεις και τα κριτήρια εγκυρότητας της αντίστοιχης έρευνας.

Οι εξελίξεις αυτές επαναφέρουν στο προσκήνιο μια επισήμανση που είχαμε κάνει πριν αρκετά χρόνια: Η Ιστορία δεν μπορεί πλέον να χρησιμοποιείται σαν ένα σταθερό σώμα γνώσεων, στο οποίο οι ερευνητές της Διδακτικής καταφεύγουν για να αντλήσουν ιδέες. Αντίθετα, τα ερωτήματα που θέτει η Διδακτική απαιτούν νέες ιστορικές έρευνες που φτάνουν σε αξιοσημείωτο βάθος και φέρνουν στην επιφάνεια ζητήματα τα οποία δεν είχαν απασχολήσει μέχρι τώρα την ιστοριογραφία των Μαθηματικών.[7] Η έρευνά μας, π.χ., για τα επιστημολογικά εμπόδια που συνδέονται με την έννοια της απόλυτης τιμής, απαίτησε τη μελέτη και ανάλυση μεγάλου πλήθους ιστορικών πηγών που καλύπτουν ένα χρονικό διάστημα τριών περίπου αιώνων (Θωμαΐδης 1995). Για να εντοπίσουμε τα κύρια «γενεσιουργά» προβλήματα, τις εννοιολογικές αλλαγές και τα μέσα αναπαράστασης που συνδέονται με την έννοια της απόλυτης τιμής, εξετάσαμε την ιστορική εξέλιξη μαθηματικών περιοχών όπως οι αρνητικοί και μιγαδικοί αριθμοί, η επίλυση των εξισώσεων, ο λογισμός ανισοτήτων, η σύγκλιση των σειρών και η αριθμητικοποίηση της Ανάλυσης. Από την άλλη μεριά, για να προσδιοριστεί η ακριβής φύση των εμποδίων που αντιμετωπίζουν οι σημερινοί σπουδαστές, απαιτήθηκε η μελέτη πολλών πηγών που αφορούν τη «διδακτική μετατόπιση» της απόλυτης τιμής, ένα ζήτημα που συνδέεται με την ιστορική εξέλιξη της διδασκαλίας (και είναι διαφορετικής φύσεως από το προηγούμενο).

Ένα υπόδειγμα ιστορικής έρευνας στα Μαθηματικά, που χρησιμοποιεί ως βασικό εργαλείο ανάλυσης τη μελέτη διαχρονικών ζητημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ. την εξέλιξη των διδακτικών εγχειριδίων), αποτελεί το βιβλίο του Gert Schubring *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the*

Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany (2005). Το έργο αυτό, καρπός εικοσαετούς ερευνητικής προσπάθειας, προδιαγράφει ορισμένες πολύ σημαντικές όψεις των σχέσεων Ιστορίας και Διδακτικής των Μαθηματικών, τόσο από πλευράς περιεχομένου όσο και μεθοδολογίας, οι οποίες θα αποτελούν κατά την άποψή μας σταθερό σημείο αναφοράς τα επόμενα χρόνια.

Οι εξελίξεις στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών τα τελευταία χρόνια καθιστούν ολοένα και πιο δυσχερή την ανάληψη νέων ιστορικών ερευνών από τους ερευνητές της Διδακτικής. Χρειάζεται επομένως να ανοίξουν δίαυλοι επικοινωνίας μεταξύ ερευνητών των δύο κλάδων, να εντοπιστούν ανοικτά προβλήματα κοινού ενδιαφέροντος και να γίνει ανταλλαγή εννοιολογικών εργαλείων και μεθόδων έρευνας. Αυτή η προσέγγιση αποτελεί, κατά την άποψή μας, απαραίτητη προϋπόθεση για την ουσιαστική αναβάθμιση των σχέσεων Διδακτικής και Ιστορίας των Μαθηματικών στο προσεχές μέλλον.

Σημειώσεις

1. Αρκεί να αναφερθούν τα ονόματα των Felix Klein, Henri Poincaré, George Pólya και René Thom.
2. Το επίθετο «αναστοχαστική» χρησιμοποιείται εδώ σε αντιδιαστολή προς το «εμπειρική».
3. ... η ιστορία μπορεί να είναι μια κατευθυντήρια γραμμή που δεν πρέπει να περιφρονεί κανείς, μολονότι περιέχει στριφογυρίσματα που δεν χρειάζεται να ακολουθήσουμε, αν και στο παρελθόν κάποιοι πίστευαν ότι το άτομο επαναλαμβάνει την ιστορία της ανθρωπότητας – στην πραγματικότητα η εκπαίδευση και η διδασκαλία πρέπει να έχουν υπόψη ότι αυτό ούτε συμβαίνει ούτε χρειάζεται να συμβεί. (Freudenthal 1983, σ.516)
4. Η πιαζετιανή ορολογία που χρησιμοποιεί ο Brousseau στο προηγούμενο απόσπασμα ενδέχεται να δημιουργήσει παρανοήσεις ως προς το ρόλο που αποδίδει στην έννοια του «εμποδίου» για το ζήτημα μάθησης. Η υπέρβαση των εμποδίων δεν θα είναι το αποτέλεσμα «φυσικής» νοητικής ανάπτυξης αλλά θα πραγματοποιηθεί σε ένα αυστηρά δομημένο διδακτικό περιβάλλον, στο οποίο ο δάσκαλος-ερευνητής έχει καθοριστικό ρόλο για την οργάνωση διδακτικών καταστάσεων που κάνουν δυνατή την αλληλεπίδραση ανάμεσα στο μαθητή και την επιδιωκόμενη γνώση.
5. Αυτή η εμπιστοσύνη στις δυνατότητες ταξινόμησης που παρέχει η ιστορική ανάλυση δεν μας εμποδίζει βέβαια να θέσουμε το επόμενο κριτικό ερώτημα: Ποιο είδος ανάλυσης των μαθηματικών ιδεών θα μπορούσε να μας εφοδιάσει με ενόραση για τις αταξινόμητες (;) απαντήσεις που έδωσε το υπόλοιπο 58% των μαθητών της έρευνας του Harper;
6. Ο χώρος δεν μας επιτρέπει να επεκταθούμε στα αντίστοιχα προβλήματα που ανακύπτουν όταν εξετάζεται κριτικά η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στις έρευνες της Διδακτικής για τα επιστημολογικά εμπόδια και τις γνωστικές ή διδακτικές ρήξεις στη μάθηση των αλγεβρικών εννοιών.
7. Βλέπε για το ζήτημα αυτό στο (Thomaidis 1993, σ.71).

Βιβλιογραφικές αναφορές

Arcavi, A. (2004) Solving linear equations – why, how and when? *For the Learning of Mathematics*. 24(3), 24-28.

Artigue, M. (1992) Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 109-132). Washington, DC: M.A.A.

Bachelard, G. (1938/1975) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: J. Vrin.

Βερυκάκη, Κ. & Ν. Καστάνης (2006) Εννοιολογικές αλλαγές: Μια αναβάθμιση του διδακτικού ρόλου της Ιστορίας των Μαθηματικών. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση* (σσ. 213-232). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Brousseau, G. (1983/1997) Epistemological obstacles and problems in mathematics. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (pp. 79-98). Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. (1989/1997) Epistemological obstacles and *didactique* of mathematics. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (pp. 98-116). Dordrecht: Kluwer.

Charbonneau, L. (1996) From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 15-37). Dordrecht: Kluwer.

Charbonneau, L. & J. Lefevre (1996) Placement and function of problems on algebraic treatises from Diophantus to Viète. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 155-165). Dordrecht: Kluwer.

Chemla, K. (2003) Generality above abstraction: The general expressed in terms of the paradigmatic in mathematics in Ancient China. *Science in Context*, 16(3), 413-458.

ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ. (Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών) (2009). *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Fauvel, J. & J. van Maanen (2000) (Eds.) *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Flegg, G. (1987) *From the Greeks to the Renaissance*. Topics in the History of Mathematics. Unit 5. Milton Keynes: The Open University Press.

Freudenthal, H. (1973) *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Fried, M. (2001) Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10(4), 391-408.

Furinghetti, F. & L. Radford (2002) Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631-654). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Gagatsis, A. & Y. Thomaidis (1995) Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 16(1/2), 3-46.

Grattan–Guinness, I. (2005) History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. In G. van Brummelen & M. Kinyon (Eds.), *Mathematics and the Historian's Craft* (pp. 7-21). New York: Springer.

Gravemeijer, K. (1998) Developmental research as a research method. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Book 1 (pp. 277-299). Dordrecht: Kluwer.

Harper, E. (1987) Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 75-90.

Hoyrup, J. (1990) Algebra and naive geometry. An investigation of some basic aspects of Old Babylonian mathematical thought. *Altorientalische Forschungen*, 17, 27-69, 262-354.

Hoyrup, J. (2002) *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Θωμαΐδης, Γ. (1995) *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης (η περίπτωση της απόλυτης τιμής)*. Διδακτορική διατριβή. Θεσσαλονίκη: Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ.

Θωμαΐδης, Γ. & Ν. Καστάνης (1987) Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της Ιστορίας με τη Διδακτική των Μαθηματικών. *Ευκλείδης γ*, 16, 61-92.

Θωμαΐδης, Γ. & Κ. Τζανάκης (2006) Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση* (σσ. 253-272). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Imhausen, A. (2003) Egyptian mathematical texts and their contexts. *Science in Context*, 16(3), 367-389.

Jahnke, H. N. (1994) The historical dimension of mathematical understanding – Objectifying the subjective. In J. da Ponte and J. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Volume 1 (pp. 139-156). Lisbon: University of Lisbon.

Jankvist, U. Th. (2009) A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.

Juschkewitsch, A.P. (1963) *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Berlin: Pfalz–Verlag.

Kieran, C. (1994) A functional approach to the introduction of algebra. Some pros and cons. In J. da Ponte and J. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Volume 1 (pp. 157-175). Lisbon: University of Lisbon.

Κολέζα, Ε. (2006) Εναλλακτικές προσεγγίσεις της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση* (σσ. 27-46). Θεσσαλονίκη: Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.

Maanen, J. van (2002) Research on history in mathematics education in the Netherlands: The 'Reinvention Studies'. In Fou–Lai Lin (Ed.), *Common Sense in Mathematics Education* (pp. 191-201). Taipei: National Taiwan Normal University.

Nooney, K. (2002) A Critical Question: Why *Can't* Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *The Mathematics Educator*, 12(1), 1-6.

Oaks, J. & H. Alkhateeb (2005) Mal, enunciations, and the prehistory of Arabic algebra. *Historia Mathematica*, 32(4), 400-425.

Otte, M. & F. Seeger (1994) The human subject in mathematics education and the history of mathematics. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 351-365). Dordrecht: Kluwer.

Piaget, J. & R. Garcia (1989) *Psychogenesis and the History of Science* (translated by H. Feider), New York: Columbia University Press.

Puig, L. & T. Rojano (2004) The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 189-223). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (1996) The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 39-53). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (1997) On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio – cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.

Radford, L. (2001) The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-36). Dordrecht: Kluwer.

Schubring, G. (2004) Ontogeny and phylogeny: Categories for cognitive development. In F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the ICME 10 Satellite Meeting of the HPM Group and the Fourth European Summer University "History and Epistemology in Mathematics Education" (revised edition)* (pp. 329-339). Uppsala University.

Schubring, G. (2005) *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany*. New York: Springer.

Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Sfard, A. (1995) The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15-39.

Sfard, A. & L. Linchevski (1994) The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 191-228.

Sierpinska, A. (1994) *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Thomaidis, Y. (1991) Historical digressions in Greek geometry lessons. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 37-43. (Βλέπε επίσης τις διορθώσεις τυπογραφικών αβλεψιών στο 11(3), σ.9)

Thomaidis, Y. (1993) Aspects of negative numbers in the early 17th century: An approach for didactic reasons. *Science & Education*, 2(1), 69-86.

Thomaidis, Y. (2005) A framework for defining the generality of Diophantos' methods in "Arithmetica". *Archive for History of Exact Sciences*, 59(6), 591-640.

Thomaidis, Y. (2011) Some remarks on the meaning of equality in Diophantos's *Arithmetica*. *Historia Mathematica*, 38(1), 28-41.

Thomaidis, Y. & C. Tzanakis (2007) The notion of historical "parallelism" revisited: Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 165-183.

Tzanakis, C. & Y. Thomaidis (2012) Classifying the arguments and methodological schemes for integrating history in mathematics education. In Bh. Sriraman (Ed.), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education* (pp.247-294). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Waerden, B.L. van. (1985) *A History of Algebra*. New York: Springer.

Ζορμπαλά, Κ. & Κ. Τζανάκης (2003) Η έννοια του επιπέδου στη γεωμετρία: Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης ενσωματωμένα σε σύγχρονες αντιλήψεις. Στο Μ. Κούρκουλος, Κ. Τζανάκης & Γ. Τρούλης (Επιμ.), *Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών* (σσ. 265-284). Ρέθυμνο: Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης.

TEACHING *WITH* AND *ABOUT* THE NATURE OF MATHEMATICS *THROUGH* THE HISTORY OF MATHEMATICS: ENACTING INQUIRY LEARNING *IN* MATHEMATICS

Tinne Hoff Kjeldsen
IMFUFA, Dept. of Science, Systems, and Models
Roskilde University

Abstract

The purpose of the present paper is two-fold: 1) to explore how university (teacher) students of mathematics, through history (and philosophy) of mathematics, can develop informed conception about the epistemology of mathematics, of how mathematicians produce mathematical knowledge, what kind of questions that drive mathematical research and how mathematical research is validated, while experiencing an inquiry learning environment that gives them insight into authentic mathematical practice in mathematics as a science; and 2) to illustrate how such students are capable of teaching in upper secondary school with and about the nature of mathematics within an explicit-reflective framework in the sense of the American educator Fouad Abd-El-Khalick (2013) by endorsing learning environments that to some extent and in some sense bear resemblance to authentic mathematical practices, that is, by establishing inquiry learning environments in mathematics as a science.

Key words

History of mathematics, epistemology of mathematics, inquiry based teaching and learning, problem oriented project work, student project work in mathematics.

Περίληψη

Ο σκοπός του παρόντος άρθρου είναι διπλός: 1) Να εξετάσει τη συμπεριφορά φοιτητών μαθηματικών (μελλοντικών καθηγητών) που εργάζονται σε ένα περιβάλλον διερευνητικής μάθησης, το οποίο τους παρέχει την δυνατότητα επίγνωσης των αυθεντικών πρακτικών που χρησιμοποιούνται στη μαθηματική επιστήμη. Ειδικότερα διερευνάται το πως μπορούν φοιτητές που δουλεύουν σε ένα τέτοιο περιβάλλον, μέσω της ιστορίας (και της φιλοσοφίας) των μαθηματικών, να διαμορφώσουν τεκμηριωμένη αντίληψη όσον αφορά στην επιστημολογία των μαθηματικών, στο πώς οι μαθηματικοί παράγουν μαθηματική γνώση, στο είδος των ερωτήσεων που οδηγεί την μαθηματική

έρευνα και στο πώς η μαθηματική έρευνα επικυρώνεται και αξιολογείται. 2) Να καταδείξει πώς τέτοιοι φοιτητές είναι ικανοί να διδάξουν στο Λύκειο με και περί της φύσης των μαθηματικών εντός ενός ρητά αναστοχαστικού πλαισίου, υπό την έννοια του Fouad Abd-El-Khalick (2013), ενισχύοντας μαθησιακά περιβάλλοντα τα οποία σε κάποιο βαθμό υποστηρίζουν ομοιότητες με αυθεντικές μαθηματικές πρακτικές, δηλαδή, δημιουργώντας περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης όσον αφορά στη μαθηματική επιστήμη.

Λέξεις κλειδιά

Ιστορία των μαθηματικών, επιστημολογία των μαθηματικών, διερευνητική διδασκαλία και μάθηση, σχέδιο εργασίας προσανατολισμένο στην επεξεργασία προβλημάτων, σχέδιο εργασίας φοιτητών στα μαθηματικά.

Introduction

The Rocard (2007) report ascribed the decline of interest in science and mathematics among young people in Europe to the way in which these subjects are taught in schools. In accordance with this, the first finding listed in the report is that:

> A reversal of school's science teaching pedagogy from mainly deductive to inquiry-based methods provides the means to increase interest in science.[1] (Rocard 2007, p. 12)

The underlying assumption is that by engaging students in scientific inquiry learning activities i.e., activities that in some sense mimic or bear resemblance to how scientists work, they will get a deeper integrated understanding of science and scientific knowledge; which in turn will foster motivation and interest.

The recommendation for inquiry based pedagogy has created a host of EU funded projects with the aims of promoting inquiry based teaching in science– and in several of these mathematics is included as a science subject (see the website www.scientix.eu). With these projects, inquiry based teaching and learning has migrated into mathematics education. In the Rocard report they use Linn, Davis, and Bell's (2004) definition of inquiry:

> inquiry is the intentional process of diagnosing problems, critiquing experiments, and distinguishing alternatives, planning investigations, researching conjectures, searching for information, constructing models, debating with peers, and forming coherent arguments. (Rocard 2007, p. 9)

Which indeed is a description of a process that bears resemblance to how scientists work when they create scientific knowledge. The connection to mathematics education is created by reference to problem solving:

> In mathematics teaching, the education community often refers to "Problem-BasedLearning" (PBL) rather than to IBSE [inquiry based science education]. (Rocard 2007, p. 9)

And, indeed, problem solving and mathematical modeling play a major role in inquiry-based mathematics education [see e.g. the survey paper by Artigue and Blomh j (2013)].

Inquiry-based teaching aims at inviting students into the workplace of scientists and mathematicians. The idea is that if students are engaged in activities and learning processes similar to the way scientists and mathematicians produce knowledge and work with science and mathematics, the students will develop a deep understanding of science and mathematics, as well as of the epistemology and more broadly the nature of these subjects. However, the emphasis on mathematical modeling and real life problem solving may provide students with a limited picture of mathematics and of what mathematicians do when they create new mathematics, how they do it, why they do it, where they got their ideas from, if these ideas are 'good' ideas, whether the produced mathematics is 'good' or 'bad', how the mathematicians distinguish 'good' from 'bad' and what characterizes fruitful mathematics. In other words: it is not clear how students, through these kinds of activities, will experience and develop informed conceptions about the epistemology of mathematics, of how mathematicians produce mathematical knowledge, what kind of questions that drive mathematical research and how mathematical research is validated.

The didactician of mathematics, Mogens Niss (1994, p. 367) distinguishes between five faces of mathematics that constitute mathematics as a discipline: Mathematics as 1) a pure science, 2) an applied science, 3) a system of instruments, 4) a field of aesthetics and 5) a teaching subject. Characteristics for the first two faces are that within these, the aim of mathematics is to produce knowledge about and insights into objects, relations and theory-buildings within mathematics. While problem solving activities can relate to mathematics as a pure science, mathematical modeling activities mainly relates to mathematics as a system of instruments for decisions and actions i.e., the third face.

In the present paper we will discuss how university (teacher)[2] students can be taught *about*the nature of mathematics through history of mathematics in an inquiry learning environment that to some extent simulate authentic research practices in mathematics as a science, i.e., within face 1 and face 2 above, where the aim is to produce knowledge in mathematics. We will also present an example from upper secondary school of how (teacher) students that have integrated knowledge of NOM (nature of mathematics) can use their NOM-understandings to teach mathematics in a learning environment that mimic mathematicians' production and validating of mathematical knowledge, i.e., are able to teach *with* (and actually also *about*) the nature of mathematics.

In other words: the purpose of the present paper is two-fold: 1) to explore how university (teacher) students of mathematics through history (and philosophy) of mathematics can develop informed conception about the epistemology of mathematics, of how mathematicians produce mathematical knowledge, what kind of questions drive mathematical research and how mathematical research is validated, while experiencing an inquiry learning environment that gives them insight into authentic mathematical practice in mathematics as a science (face 1 and 2 above); and 2) to illustrate how such students are capable of teaching in upper secondary school *with* and *about* the nature of mathematics within an explicit-reflective framework in the sense of the American educator Fouad Abd-El-Khalick (2013) by endorsing learning environments that to some extent and in some sense bear resemblance to authentic mathematical practices, that is, by establishing inquiry learning environments in mathematics as a science.

1. Teaching with and about the nature of mathematics within an explicit-reflective framework

Loosely speaking, inquiry-based teaching means to invite students to work in ways that are analogous or similar to how scientists and mathematicians work. In this paper, we are concerned with mathematics as a science, and in this ball game the aim of mathematicians' work is to generate knowledge about and insights into objects, relations and theories within mathematics – in short, to produce mathematical knowledge. In this setting, inquiry-based teaching means to establish a learning environment that function as a surrogate for authentic mathematical research practices. It goes without saying that teachers in order to be able to enact such learning environments must themselves have informed conception about the nature of mathematics and (processes of) mathematical research. Mathematics teaching in higher education traditionally follows the recipe: a professor gives a lecture where he/she presents some definitions and state and prove some theorems on the black board. Problems within mathematics are stated and worked out in order to illustrate the use and power of the theorems. The students' homework is focused on working out further mathematical theoretical problems and proofs. It is implicitly assumed that by being immersed in such problem solving activities into the subject matter of mathematics, its concepts, definitions, theorems, techniques and theories, students will somehow automatically absorb and develop informed conceptions about the nature of mathematics. However, in order for this to happen, issues related to the nature of mathematics needs to be addressed directly, they need to be made explicit objects of students' reflection. Inquiry experiences in themselves are not enough.[3] In order for students to develop understandings about the epistemology of mathematics, of how mathematicians produce mathematical knowledge, what kind of questions that drive mathematical research and how mathematical research is validated, they need to reflect explicitly on such experiences.

That students do not necessarily develop informed NOM (nature of mathematics) conception about mathematics as a knowledge generating scientific enterprise by being immersed in inquiry activities does not mean that inquiry cannot be used in that respect. But, as Abd-El-Khalick and Lederman (2000) have argued for the development of NOS (nature of science), an explicit-reflective framework it required in order to achieve such understandings. By 'explicit' they mean that some specific learning objectives related to students' understanding of NOS must be included in the curriculum; by 'reflective' they refer to instructions aimed at helping students to reflect upon their experiences with learning science from within an epistemological framework.

Abd-El-Khalickdistinguishes between teaching *with* and teaching *about* NOS:

> Teaching *about* NOS refers to instruction aimed at enabling students to achieve learning objectives focused on informed epistemological understandings about the generation and validation of scientific knowledge and the nature of the resultant knowledge. [...] Teaching *with* NOS entails designing and implementing science learning environments that take into consideration these robust epistemological understandings about the generation and validation of scientific knowledge. (Abd-El-Khalick, 2013, p. 2090).

If we adopt this framework to mathematics, teaching *about* the nature of mathematics means to teach towards learnings objectives of the following kind: To make students able to investigate and analyze the methods mathematicians use to generate knowledge, to discuss, criticize and asses the epistemological status of this knowledge, to investigate and analyze the role of proofs in mathematics, to investigate and discuss mathematical objects' ontological status, to investigate and discuss the relationship between mathematics and other sciences, to discuss and critically assess the distinct nature of mathematics, as well as its development historically and in interaction with culture, society and other sciences.

In order to couple the development of students' informed conceptions about the nature of mathematics with inquiry teaching in mathematics in a meaningful way, mathematics teachers must 1) have knowledge and informed conceptions of and *about* the nature of mathematics themselves, 2) come to understand how inquiry is in fact conducted in mathematical research, 3) be able to design inquiry based learning environments *in* mathematics teaching, and 4) be able to teach *with* the nature of mathematics in the sense explained above for nature of science.

2. Inquiry teaching in mathematics through history of mathematics

How can (teacher) students in higher mathematics educations get firsthand experiencesin a meaningful way with research practices in a field that is so specialized and operates with such abstract notions as mathematics, where students usually are not invited into a research environment until they become Ph.D. students? There is not much help to gain from their textbooks. Mathematics textbooks very rarely discuss or indicate where the mathematical objects they are dealing with come from, why they look the way they do and why they are interesting. On the contrary, mathematical objects are usually introduced as timeless entities that appear in textbooks seemingly out of nowhere and for no particular reason. Most of the mathematics that students are introduced to at bachelor level and in the first year of master programs has not been developed recently. For most students, observing how mathematicians work when they do research will not be a feasible way to gain insights into inquiry processes in mathematical research.

However, such inquiry processes can be made visible and accessible for students to experience by studying the history of the subject matter of mathematics. In such investigations students can examine processes of how mathematicians have generated the ideas, constructed the concepts and produced the mathematics they read about in their textbooks. But, again, we have to keep in mind that the mere exposure to historical development processes of mathematics is not enough for students to develop informed conceptions about the nature of mathematics – for this to happen, students must be challenged to reflect explicitly and critically upon concrete aspects of the nature of mathematics like the ones listed above.

3. PPL – an explicit-reflective framework for teaching about the nature of mathematics in an inquiry learning environment

PPL stands for Problem-oriented Project Learning and is short for the pivotal pedagogical principle underlying the organization of the all study programs at Roskilde University (RUC), Denmark. It refers to the principle of *problem-oriented participant-directed project work* as it has been developed and is practiced at RUC.[4] Common for all programs is that in each semester the students use half of their time on regular course work. The other half of their study time they work in groups of two to eight students on a project which objective is to solve (or analyze or formulate or make solvable) a problem of the group's own choice under supervision of a professor. The students work on the two strands (courses and project work) of study activities simultaneously – however, there is a so-called 'project-intensive' period of 1½-3 weeks each semester, depending on the specific study program.

The project work is documented throughout the semester through outlines, work- and discussion-papers written by the students. These are discussed and planned for at weekly meetings with the supervisor. At the end, the group writes a coherent report of 50-100 pages, in which the students state and argue for their problem and its relevance, their methodology and its validity, their choice of theories, experiments, data-collections, analyses, results and conclusions. They make a critical evaluation of their solution. The students consult textbooks, research literature and experts in their field(s) of investigation. During the project work, they often divide the jobs between them in various ways, but in the end every student in a group is responsible for the entire project and its report. The project work is evaluated at an oral group-examination with an external examiner. The students are responsible for every aspect of the project work: the formulation of their problem, the argumentation for its relevance, formulation and justification of hypotheses, the choice of methodology and discussions of its strengths and weaknesses. They are supposed to be able to reflect explicitly and concretely about how their solution/analysis depends on their methodology. They are held accountable for the design and performing of experiments and/or analyses based on theories and the construction of models. The students are in charge of the project work from beginning to end, supported by various milestones throughout the semester.

One of the projects the students work on at the master level in mathematics is constrained by the theme: 'mathematics as a scientific discipline'. In the study regulation, this type of project is described in the following way:

> The project should deal with the nature of mathematics and its "architecture" as a scientific subject such as its concepts, methods, theories, foundation etc., in such a way that the nature of mathematics, its epistemological status, its historical development and/or its place in society gets illuminated.

Every mathematics student at RUC at the master level will work on a project that fulfills these requirements. They will do so in a group with other students. Each group will work on their own problem as described above, but common for all the problems is that the students, through their work within a group, gain experiences with mathematics as a scientific subject as described in the quote above from the study regulation. Hence, there are explicit references to the nature of mathematics learning objectives for the students within the curriculum of the master's program in mathematics.

The problem orientation of the project work together with the study regulation of the 'mathematics as a scientific subject' guaranties that the students work with a specific problem that address (aspects of) the nature of mathematics, in such a way that it is anchored in the subject matter of mathematics (its concepts, methods, theories, foundation etc.). Through this anchoring, the students' reflections become contextualized and concretized. That is, the problem orientation together with the curriculum description of the 'mathematics as a scientific subject'-project provides structured opportunities for the students to "examine their science [mathematics] learning experiences from within an epistemological framework" as required by Abd-El-Khalick (2013, 2091) in order to have a reflective framework. The students gain their mathematics as a science learning experience from the concrete attachment of their problem within the subject matter of mathematics. The aspects of the nature of mathematics that their problem is addressing provide the epistemological context in which the students examine their mathematics-as-a-science learning.

So argued, the problem-oriented project work under the theme 'mathematics as a scientific subject' as it is carried out in the PPL-model at Roskilde University, provides an explicit-reflective framework for teaching about the nature of mathematics in the inquiry pedagogy defined by the principles and the organization of the project work at RUC. Be aware, that inquiry pedagogy refers to the study and learning environment created by the organization of the problem-oriented project work most notably with the students' autonomy throughout the whole process of the project work.

The problem-orientation together with the description of the 'mathematics as a science subject'-project also establishes a history, philosophy and/or sociological inquiry learning environment depending on the students' choice of problem and methodology.

In the next section we will we see how students within PPL under the theme 'mathematics as a scientific subject' in the master's program in mathematics have opportunities

1) to also work 'mathematical inquiry', that is, to work in a way that resemblances how mathematical research is done,
2) to develop informed conception of the generation and validation of mathematical knowledge.

4. Students' Development of Informed Conception of Mathematical Knowledge Production

In this section two examples of PPL-projects of the 'mathematics as a scientific subject' type will be presented and discussed to illustrate how the students in the respective project-groups, through history, developed informed conception about the epistemology of mathematics, about how mathematicians produce mathematical knowledge, what kind of questions that drive mathematical research and how mathematical research is validated, while experiencing a mathematical inquiry learning environment that gave them insight into authentic mathematical practices.

The first project report[5] has the title *Generalizations in the Theory of Integration: An Investigation of the Lebesgue Integral, the Radon Integral and the Perron Integral*. It is a 75 page report written by two students who were curious about the "need" in mathematics for further integrals than the Riemann integral. In the textbook of their first analysis course they had stumbled over a footnote in which it was pointed out that there are other types of integrals e.g., the Lebesgue integral. The students soon discovered that there are many other integrals e.g., the Denjoy, the Perron, the Henstock, the Radon, the Stieltjes and the Burkill integral, as they wrote in their report[6]:

> All these integrals are most often described in the literature as *generalizations*, and sometimes as *extensions*, of either the Riemann or the Lebegues integral. This gave rise to questions such as: What do these integrals do? Why have so many types of integrals been developed? Why is it always the Lebesgue integral we hear about? What is meant by generalizations in this respect? In what sense are the various integrals generalizations of former definitions of integrals? Are the generalizations of the same character? (Timmermann and Uhre, 2001, p. 1, italic in the original)

And they continue in the next paragraph with their own motivation:

> the above mentioned questions are related to an overall wondering of ours about *how* mathematics develops and *what* it is that drives this development, i.e., *why* mathematics develops as it does. (Timmermann and Uhre, 2001, p. 1, italic in the original)

The students chose to investigate this by looking into the history of mathematics, as they explained in their report:

> The development of mathematics depends on the people who create the new mathematics and the importance of the mathematics that is being developed. In order for new mathematics to be created within an area of mathematics, there have to be some mathematicians who are actually interested in investigating and uncovering this area. By studying the motivation of the people who have helped to develop the integral concepts, we can get an insight into why a mathematical area is being studied. (Timmermann and Uhre, 2001, p. 2)

Supported by literature from historians of mathematics, the students traced and read mathematical papers and books of Lebesgue, Perron and Radon in which these mathematicians developed – or worked with mathematical ideas that motivated them to develop – the integrals that bear their names.[7] The students analyzed and compared the sources with respect to the motivation of the mathematicians, why they created these generalized integral concepts, the differences and similarities between the characteristics and scope of the generalizations, guided by the following research questions that the students had formulated for their project work:

> What motivated Lebesgue, Perron and Radon in their pursuit of their generalizations of the integral?
>
> What are the characteristics and scope of the generalizations by Lebesgue, Perron and Radon, and what are the differences among them?
> (Timmermann and Uhre 2001, p. 3)

On the one hand, by focusing on understanding the mathematicians' motivation for generalizing the integral concept when reading the historical sources, the students became engaged with mathematical inquiry analogue to some research processes in mathematics as they are carried out by working mathematicians. The students work was guided by historical and philosophical questions, but they answered these questions through analyses of the mathematical content, definitions, theorems, proofs and techniques that were stated, treated and worked out in the sources. Through their analyses of the sources, the students gained first-hand experiences with research processes in the production of mathematical knowledge by studying the masters, so to speak.

On the other hand, by focusing on analyzing and identifying the characteristics of the various generalizations of the integral concept, the students came to reflect upon their inquiry investigations from within an epistemological framework. This last question structured the students' critical reflections about the function, assessment and significance of the various generalizations of the integral concept.

The second project report has the title: *The Real Numbers – Constructions in the 1870s*. The project was carried out by a group of six students. They wrote a report of 56 pages in which they answered the following question:

> Why did a need for a construction of the real numbers emerge around the 1870s?

These students were puzzled when they realized that mathematicians had worked with the real numbers on an intuitive foundation for years and years before it (the foundation of the real numbers) 'all of a sudden' became a problem that needed to be solved. The students explained their own motivation in their report as follows:

> ... it [the mathematics teaching we were exposed to in primary, and in lower and upper secondary school] does not provide any kind of understanding of where mathematics comes from, which people were involved, who defined or constructed the concepts and tools we use today. Well, of course, most of us will become acquainted with some key persons from the history of mathematics, for example Newton and Euclid, but the fewest will obtain a proper overview. Who knows, for example, how the real numbers emerged or were constructed? And especially: who knows that the real numbers had foundational problems and only then were constructed?
>
> Basically we had the idea that one mathematician saw that it was a problem that a construction of the real numbers was lacking, solved it and then presented it [the construction of the real numbers] as a solved problem. However, we quickly discovered that this was not the case. There was not just one mathematician who believed that there was a

> problem, but several. This indicated that the lack of a construction of the real numbers had become a problem in connection with developments of mathematics up to then. (Wandahl et. al., 2004, p. 1-2)[8]

The students' motivation and their research question (the problem that guided their project work) are concerned with a fundamental aspect of the nature of mathematics as a scientific subject, namely what do mathematicians wonder about? How do the problems that mathematicians struggle to solve emerge? Where do these problems come from? How are they connected with ongoing research in mathematics? When, why and by whom are they deemed so important, that they become essential problems of the field in need of a solution? These questions structured the students' analyses of the mathematical sources and their reflections of how mathematical knowledge was generated in this particular episode in the history of mathematics.

To place the discussion in the historical context, the students studied the paper *RienanalytischerBeweis des Lehrsatzes, dasszwischen je zweyWerthen, die einentgegensetztesResultatgewären, wenigstgenseinereelleWurzel der Gleicheung liege* by Bernard Bolzano (1817) in which he proved the mean value theorem, and discussed methodological and epistemological issues in mathematics. The students considered Blozano's work as an indication that such concerns were present in mathematical research during the nineteenth century. In order to answer their own research questions for the project work, the students chose to investigate the work of Dedekind and Cantor. They realized that these two mathematicians had different reasons for constructing the real numbers with Dedekind's motivation growing out of a concern for teaching, whereas Cantor ran into the problem of the construction of the real numbers in his work with trigonometric series. Based on the work of historians of mathematics, the students discussed the various conceptions of the arithmetization of analysis in the 1870s, in order to place their analyses of the historical sources in a broader historical context. The students became aware that mathematicians do not always agree. They quoted Frege's critic of the constructions of the real numbers:

> How could one be sure, in all these constructions, that the new concepts or rules introduced did not lead to contradictions, violating the minimal criterion accepted by all parties for the possibility of a mathematical concept. (Wandahl et. al., 2004, p. 42 [quoted from Epple (2003), p. 302)]

As was the case with the project on generalizations of the integral concept, the students were invited into the mathematical 'workbench' of Bolzano, Dedekind and Cantor among others. Through their work with the historical sources, the students became engaged with mathematical inquiry. The requirement for the "mathematics as a scientific subject"-project and their specific problem-orientation provided the students with an explicit-reflective framework that gave opportunities for them to reflect upon their inquiry investigations of the mathematical content of the sources from within an epistemological framework of how this particular mathematical knowledge was generated, validated and discussed among mathematicians at the time.

The two project reports illustrated how the students acquired informed conceptions about the nature of mathematics coming from different perspectives: In the first project, the students obtained concrete experiences with processes of forming new objects in mathematics with reference to already existent objects[9], through generalizations – and how different processes of generalization can be distinguished with respect to whether the new object is an abstraction of the already existent one or whether the new object is an extension in the sense, that is contains the object it is a generalization of. In the second project, the students experienced how problems of foundational and epistemological nature arose with respect to the foundation of the real numbers, how this generated new research in mathematics and gave rise to discussions and debates among mathematicians – aspects which are important parts of mathematical inquiry, but rarely occur in traditional mathematics teaching. However, such aspects can be brought forward and made explicit objects of students' reflection through history of mathematics.

Characteristics for both projects are that the students work was embedded in rich and mathematically thick episodes from the history of mathematics about motivations and driving forces behind the development of mathematics, that the students became immersedin mathematical inquiry analogue to how mathematicians do research in 'pure' mathematics, and that they became engaged with structured and critical reflections about these aspects within an epistemological framework.

5. Teaching withthe nature of mathematics through history in an inquiry learning environment

The nature of mathematics (NOM) is explicit in the mathematics curriculum for upper-secondary school in Denmark. One of the learning goals for mathematics is that the students should be able to demonstrate knowledge of how mathematics has developed in interaction with the historical, scientific and cultural development. Another learning goal is that students should demonstrate knowledge of the identity and methods of mathematics.

In this section we shall see an example of how a mathematics (teacher) student from Roskilde University used her knowledge about the nature of mathematics that was formed within the explicit-reflective framework which was unfolded and illustrated above, to teach with and about the nature of mathematics in a Danish high school. She used her knowledge and experiences from her own mathematics education to enact an inquiry learning environment that invited her 17 year old high school students (11^{th} graders) into inquiry processes that bore some resemblance with authentic mathematical practices. She created the learning environment by having the students read excerpt from original historical sources from the development of the function concept i.e., by having the students studying the masters. By setting up explicit learning goals for the students that addressed historical and mathematical questions related to the development of the function concept, and by having the students analyze the original sources to answer these questions, the teacher designed a learning environment in which she taught both *with* and *about*the nature of mathematics. Altogether she spent 13 lessons of 50 minutes each with the students in the classroom – and the students were expected to spend an equal amount or more of time working on the various tasks at home.

The intentions for the students' learning outcome reflect the explicit-reflective framework (Petersen, 2011):

- The students will acquire an understanding of what is involved in the modern definition of a function
- The students will come to reflect upon the concept of a function – what is a function?
- The students will acquire an understanding of our modern function concept as a result of a historical developmental process
- The students will gain insights into the role played by the human actors [former mathematicians] in the development of the function concept.

The teaching module was designed in two steps: In step 1 the students were divided into four so-called basic-groups that had specific but different tasks. Group 1 worked with various historical definitions of a function, group 2 worked with the debate of the motion of a vibrating string primarily between the Swiss mathematician Leonhard Euler (1707-1783) and the French mathematician Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), group 3 situated the main actors (Euler and the German mathematician Peter G. L. Dirichlet (1805-1859)) in their respective societies and the time in which they lived, and group 4 worked on the modern concept of a function. Each group received a working sheet from the teacher with explicit requirements for their work. Group 1, e.g.,was given Danish translations of an extract from Eulers' (1748) book *Introductio in AnalysinInfinitorum*with the definition of a function, and an explanation of how Euler later in 1748 extended his original function concept, and an extract from Dirichlet's paper (1837) Über die DarstellungganzwilkürlicherFunctionendurch Sinus- und Cosinusreihen. Based on these three texts the students received the following task:

> Explain what a function is according to Euler's original definition of a function in Introductio in AnalysinInfinitorum, Euler's extended definition of a function and Dirichlet's definition of a function. Describe how these three definitions of a function are different from each other and in what

> ways they are similar. Explain what the principle of the generality of the variable is all about and the relationship between this principle and the principle of the generality of the validity of analysis. (Petersen 2011, Appendix B)

The task was followed by eight questions which were meant both as a help for the students to 'de-code' the task and to make the requirements and the expectations of the teacher for the students' work more explicit, and to qualify the students' reflections and structure their work:

> (1) What are the central concepts in Euler's definition of a concept? (2) Which principle characterizes a variable according to Euler, and what is this principle called? (3) What is the principle of the generality of the variable all about? (4) What are the similarities between the principle of the generality of the variable and the principle of the generality of the validity of analysis? Consider why both principles have been given names that contain the word "general".[10] (5) How does Euler's extended concept of a function differ from his original concept, and what are the similarities? (6) Find three ways in which Dirichlet's concept of a function differs from Euler's definition. (7) Explain from text 3, what Dirichlet must have thought about the generality of the variable. (8) On page 10 there are four pictures. Which of these pictures are graphs of functions according to Euler's definition in *Introductio in AnalysinInfinitorum*, Euler's extended definition and Dirichlet's definition respectively? (Petersen 2011, Appendix B)

In step 2 new groups were formed in such a way that each group had at least one participant from each of the four basic-groups. This meant, in least in principle, that all the knowledge that had been developed in the basic groups was present in each of the new groups. In contrast to the basic-groups, the new groups, also called the expert-groups, all worked on the same assignment. They were asked to write an essay about a fictional debate between mathematicians, where one part is claiming that mathematical concepts are static, timeless entities that exist independent of humans and society. In opposition to this, the other part reinforce that mathematical concepts develop over time, that they are the results of research processes. The students received a made-up invitation from the journal NORMAT to contribute to this debate by submitting a paper for the journal on this issue. The students should argue for their own opinions based on the collected work that had been done in the basis-groups. The teacher had formulated four issues that the students had to address and discuss in their paper: Euler's, Dirichlet'sand our current concept of a function; the two meta-rules i.e., the generality of the variable and the general validity of analysis, the raison d'etre behind domain, range of image and proofs; sociological factors that had influenced the development of the function concept; and human factors.

The analysis of data that was collected during the teaching shows that the high school students realized that the concept of a function, they read about in their textbook, was the result of a historical development, and they also gained more specific knowledge about some of the key elements of this development. The students became immersed in mathematical inquiry processes by tracing (parts of) the path of the masters, as is illustrated by the following quotes from one of the essays written in the expert-groups. The quotes show that these students became aware of at least one source for mathematical research questions as well as of discussions among mathematicians that relate to the validation of mathematical knowledge:

> The reason why Euler began to work with discontinuous functions was because of a debate between contemporary mathematicians. The debate concerned the fact that the functions the mathematicians worked with could not describe a vibrating string.
>
> [...] the development of the concept of a function was among other things due to human attitudes and interpretations, which were important factors. For example, some of Euler's contemporary mathematics colleagues were of the opinion that Euler's extended function concept should not be used because it went against the principle of mathematics. They thought it was cheating. This meant that Euler's extended function concept never came to be used as intended, and a new function concept was developed by Dirichlet.

We will not go further into the results regarding the learning of the high school students, for this we refer to Kjeldsen and Petersen(2014). Here we will restrict ourselves to pointing out that the teacher's knowledge *about* the nature of mathematics and her informed epistemological conception about the production and validation of mathematical knowledge (which she had obtained within the explicit-reflective framework of the 'mathematics as a scientific discipline'-project during her mathematics studies at Roskilde University), enabled her to design and implement the course described above in high school. A course where she taught both *with* and *about* the nature of mathematics through the history of mathematics; i.e., she taught in a way that immersed the high school students in mathematical inquiry processes and made them capable of forming epistemological understandings of how mathematical knowledge is generated and validated.

6. Conclusion

The problem-oriented project work in the master's program in mathematics at Roskilde University provides and explicit-reflective framework in the sense ofAbd-El-Khalick (2013). The analyses of the two student projects on generalizations in the theory of integration and the construction of the real numbers respectively, demonstrate how the students in this program through working with rich and mathematically thick episodes from the history of mathematics, can develop informed conception about the epistemology of mathematics, of how mathematicians produce mathematical knowledge, what kind of questions that drive mathematical research, and how mathematical research is validated, while experiencing an inquiry learning environment that gives them insight into authentic mathematical practice. In the course of their problem-oriented project work they came to reflect upon and criticize the way mathematicians generate and validate mathematical knowledge, i.e., inquiry processes in mathematical research were made explicit objects for the students' reflections within an epistemological framework.

The analysis of the design and implementation of the teaching in high school of the historical development of the function concept exemplifies how the RUC master program in mathematics enables its graduates to use their integrated understanding of history and philosophy of mathematics to teach both *with* and *about* the nature of mathematics in the sense of Abd-El-Khalick (2013) by endorsing learning environments that, to the extent explored and in the sense described above, bear resemblance to authentic mathematical practices, that is, to establish mathematical inquiry learning environments through history.

Notes

1. In the Rocard report, the term science also includes mathematics.
2. In Denmark, upper secondary mathematics teachers have a university degree in mathematics. They become high school teachers in mathematics by applying for a teaching job at a school after they graduated from the university. During the first year or two as a teacher, they go through a pedagogical and mathematics didactics education.
3. Research from science education has documented that "while inquiry might serve as an ideal context for helping students and teachers develop informed NOS [nature of science] views, it does not follow that engagement with inquiry would necessarily result in improved understandings." (Abd-El-Khalick 2013, p. 2089). For further references with documentation see Abd-El-Khalick (2013).
4. For a thorough description of the pedagogical foundation of PPL at Roskilde University and the various student-centered learning concepts that are combined in the Roskilde Model of problem-oriented learning and project work see Andersen and Heilesen (2015).
5. The students' project report can be downloaded at the following address: http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/403.pdf

6. The translations into English have been done by the author.
7. For example, with respect to Lebesgue, the students read hisnote *Sur unegénéralisation de l'intégraledéfinie*which was published in *ComptesRendus de l'Académie des Sciences de Paris* in 1901 and his thesis *Intégrale,Longueur, Aire*from 1902.
8. The translations into English have been done by the author.
9. See Kjeldsen and Carter (2012) for a philosophical discussion of the growth of mathematical knowledge with a special focus on the question of how mathematical objects are introduced to mathematical practice.
10. These questions address the issue of what Sfard (2008) calls meta-discursive rules in mathematics. For a discussion of these, see Kjeldsen and Blomh j (2012) and Kjeldsen and Petersen (2014).

References

Abd-El-Khalick, F. (2013) Teaching *With* and *About* Nature of Science, and Science Teacher Knowledge Domains. *Science & Education*, 22(9), 2087-2107.

Abd-El-Khalick, F. & Lederman, N.G. (2000) Improving science teachers' conceptions of nature of science: A critical review of the literature. *International Journal of Science Education*, 22(7), 665-701.

Andersen, A. S. &Heilesen, S. (2015) *The Roskilde Model: Problem-oriented Learning and Project Work*. Springer: Charm, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2015.

Bolzano, B. (1817) *Rien analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die einentgegensetztes Resultat gewären, wenigstgens eine reelle Wurzel der Gleicheung liege*. Prague, Haase. 2nd edition, Leipzig, Engelmann, 1905; Fascimile, Berlin, Mayer & Mueller, 1894.

Dirichlet, P. G. L. (1837) Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch sinus- und cosinus-Reihen. *Repertorium der Physik*, 1, 152-74. Dirichlet'sWerke 1, 133-60.

Epple, M. (2003) The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis, 1860-1910. In H. N. Jahnke (Ed.). *A History of Analysis*(pp. 291-323). History of Mathematics, Volume 24, American Mathematical Society, London Mathematical Society.

Euler, L. (1748a) *Introductio in Analysin Infinitorum* (2 volumes). Lausanne: Bousquet. Euler's *Opera Omnia*(1) 8-9.

Kjeldsen, T.H. & Blomh j, M. (2012) Beyond Motivation - History as a method for the learning of meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 327-349.

Kjeldsen, T.H. & Carter, J. (2012) The growth of mathematical knowledge—Introduction of convex bodies. *Studies in History and Philosophy of Science* 43, 359–365.

Kjeldsen, T.H. & Petersen, P.H. (2014) Bridging History of the Concept of Functionwith Learning of Mathematics: Students' Meta-Discursive Rules, Concept Formationand Historical Awareness. *Science & Education*, 23, 29–45.

Linn, M. C., Davis, E. A. & Bell, P. (2004) Inquiry and Technology. In M.C. Linn, E.A. Davis & P. Bell (Eds.), *Internet Environments for Science Education* (pp. 3-28). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Niss, M. (1994) Mathematics in Society. In Biehler, R., Scholz, R.W., Strässer, R., Winkelmann, B. (eds.): Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, (pp. 367-378), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

Petersen, P.H. (2011) Potentielle vindinger ved inddragelse af matematikhistorie imatematikundervisningen. Master Thesis in mathematics, Roskilde University, Denmark. http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/483web.pdf

Rocard, M. (2007) *Science Education NOW: A renewed Pedagogy for the Future of Europe*. Brussels: European Commission, available at http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf, accessed June 10, 2015.

Sfard, A. (2008) *Thinking as Communicating*. Cambridge: Cambridge University Press.

Timmermann, S. & Uhre, E. (2001) *Generalizations in the theory of integration – an investigationof the Lebesgue integral, the Radon integral and the Perron integral*. (In Danish). IMFUFA, text 403, Roskilde University.

Wandahl, D., Terkelsen, R., Jørgensen, L., Andersen, L., Hansen, H. & Lassen, L. (2004) *The Real Numbers – Constructions in the 1870s.*(In Danish). IMFUFA, Roskilde University. www.scientix.eu

STUDY GROUP IN HISTORY OF MATHEMATICS – – - SOME HPM ACTIVITIES IN HONG KONG

SIU Man Keung
Department of Mathematics
University of Hong Kong

Abstract

In this paper the author shares with the readers the running of some local HPM activities of a study group in history of mathematics formed by mainly school teachers and curriculum officers of the Mathematics Section of the Education Bureau in Hong Kong.

Key words

History and pedagogy of mathematics, professional teacher development.

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό ο συγγραφέας μοιράζεται με τους αναγνώστες την εξέλιξη ορισμένων δραστηριοτήτων που αφορούν στην Ιστορία και Διδακτική των Μαθηματικών μίας ομάδας μελέτης της Ιστορίας των Μαθηματικών που αποτελείτο κυρίως από καθηγητές του σχολείου και από μέλη της επιτροπής αναλυτικών προγραμμάτων του Γραφείου Εκπαίδευσης του Hong Kong.

Λέξεις κλειδιά

Ιστορία & Παιδαγωγική των Μαθηματικών, Επιμόρφωση εκπαιδευτικών.

1. Introduction

Thirty-five or forty years ago the topic of HPM (History and Pedagogy of Mathematics)[1] was a relatively new venture. With the hard work of many researchers and teachers in the intervening years this is no longer the case. For many years now various authors in different parts of the world have written on the important role played by the history of mathematics in mathematics education. The 10th ICMI Study conducted in 1998 focused on the role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics, with its work reported in *History in Mathematics Education*: *The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000). In this paper the author shares with the readers the running of some local HPM activities of a study group in history of mathematics formed by mainly school teachers and curriculum officers of the Mathematics Section of the Education Bureau in Hong Kong.

2. General Framework

In a chapter of the book *The First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India* a general framework of what the author has in mind concerning HPM activities is given. Generally speaking, teaching is to tell a story, a good story which arouses curiosity and excites imagination, a story about the long quest by the human mind for an understanding of the world around us. In this respect the history of mathematics is a particularly pertinent component in the task. The author continues to elaborate on this point (Siu, 2014):

"The history of mathematics is an academic discipline just like any other academic discipline, with its own scope of study, body of research, and literature. Although I do dabble in this area now and then, I consider myself an amateur in this academic discipline. I am not qualified as a historian of mathematics; at the most I am a friend of the history of mathematics. I am more interested in integrating the history of mathematics with the teaching and learning of mathematics. This is not the same as advocating the teaching of the history of mathematics in schools and universities. I do not think it proper to teach the history of mathematics *per se* in school. At the university this may constitute a course as an elective, but not a staple diet for mathematics students. However, I do advocate the integration, at all levels of mathematical study, of suitable material taken from the history of mathematics to enhance and enrich our teaching and to convey a sense of history.

The rationale behind my position is twofold. First of all, the basic tenet I hold is that mathematics is part of culture, not just a tool, no matter how useful this tool might prove to be. As such, the history of its development and its many relationships to other human endeavours from ancient to modern times should be part of the subject. Secondly, through my own experience in teaching and learning I have found that knowledge of the history of mathematics has helped me to gain a deeper understanding and to improve my teaching. Now, integrating the history of mathematics with teaching is only one of many ways to do this. Anything which makes students understand mathematics better and makes students get interested in mathematics may be a good way. The history of mathematics may not be the most effective choice, but I believe that, wielded appropriately, it can be an effective means. Moreover, knowledge of the history of mathematics may make a teacher "more patient, less dogmatic, more humane, less pedantic" and encourage a teacher to become "more reflective, more eager to learn and to teach with an intellectual commitment" (Siu, 1997/2000).

In coordinating a Topic Study Group (TSG17) on HPM activities at ICME-10 in 2004 at Copenhagen, Denmark together with Costas Tzanakis of the University of Crete, we pointed out that "despite its importance, history of mathematics is not to be regarded as a panacea to all pedagogical issues in mathematics education, just as mathematics, though important, is not the only subject worth studying," and further that "it is the harmony of mathematics with other intellectual and cultural pursuits that makes the subject even more worth studying" (Siu & Tzanakis, 2004). In this wider context, the history of mathematics has a yet more important role to play in providing a fuller education of a person, which is particularly pertinent in this age of mass education with the theme of "mathematics for all" (Siu, 1994).

I have likened the use of the history of mathematics in the classroom to an appetizer, a main course or a dessert, which caters respectively to motivation, content, or enrichment. Unlike the gastronomic analogue, a more fitting way is not to regard the use of the history of mathematics in the classroom in compartmentalized categories. In fact, it is even debatable whether the phrase "*using* the history of mathematics" should be employed at all. The word integrating, and better yet permeating, may be more appropriate.

Three aspects of the study of the history of mathematics are closely related and yet are separate issues: (1) doing research in the history of mathematics, (2) teaching the history of mathematics, and (3) integrating the history of mathematics with the teaching and learning of mathematics. HPM activities deal mainly with the third aspect, which can further be refined into three interrelated aspects: (3a) learning and teaching a certain subject area in mathematics, (3b) providing general motivation and enjoyment in studying mathematics, (3c) nurturing a deeper awareness of mathematics and its social and cultural context.

In terms of implementation there are four areas to note: (1) to consider epistemological issues relevant to the relations between mathematics, history, mathematics education and other disciplines; (2) to enrich teachers' education at all levels, both by introducing courses relating the history of mathematics to other disciplines and by letting teachers become acquainted with historically inspired material that can be or has been used in the classroom; (3) to construct and develop appropriate relevant didactical material, which can either be used directly in the classroom or constitute resource material for mathematics teachers; and (4) to present specific examples and the underlying rationale as an illustration of how history may contribute to the improvement of mathematics teaching by exciting the students' interest, enhancing their understanding of mathematical results or theories, or deepening their awareness of what mathematics really is (Siu & Tzanakis, 2004)."

3. Working with School Teachers

As a teacher of mathematics, the author wishes that students can be brought up in a classroom culture and environment that enables them to acquire active and effective learning habits so that they are able to access and read references; be able to write and speak clearly so as to communicate with others; be able to make sense out of mathematics and to explain what they comprehend; be willing to think, to query, to challenge, and to probe; have first-hand mathematical experiences so that they realize the dual natures of mathematics as an exact science as well as an imaginative endeavour, and as an abstract intellectual pursuit as well as a concrete subject with real-life applications; and appreciate the beauty, the import, the power, and the limitations of mathematics (Siu, 2014).

With school mathematics in mind the author tries to work with school teachers and to encourage them to participate in HPM activities. The author also offered a course titled "Development of Mathematical Ideas" at the University of Hong Kong from 1976 to 2005 when he retired (Siu, 1997/2000), at the same time collaborating with colleagues in the Mathematics Section of the Education Department of the Hong Kong Government[2], who can reach a wider network of school teachers in an official capacity, in conducting occasional seminars and workshops.

As an ineffective promoter working in an examination-oriented education environment the author had not done too well until rather recently. With the enthusiasm and able organization of a colleague in the EDB, Christine M. Y. Tang, and the dedicated effort of a very experienced school teacher, Jack C. K. Leung, a study group on the history of mathematics was formed in the summer of 2007 that meets about five times a year. From the summer of 2014 onward, owing to the posting of Christine Tang to another Section of the EDB, the Study Group continues to enjoy the able leadership of another young curriculum officer, Stanley C. Y. Lee. Members of the Study Group relish every single meeting in which they freely share ideas and experiences even though the Study Group is small with only a dozen stalwarts, whose dedication to their teaching profession the author much admires, knowing the very heavy workload and work pressure that local school teachers are placed under. Compared to school teachers elsewhere that the author has met in HPM conferences, this fledgling local group is just taking a small initial step and has a far way to go, but they are trying to move forward (Siu, 2014).

An exchange of emails between members of the Study Group after the first meeting in May of 2007 illustrates what the Study Group sets out to do. Two such emails from the initiator and the author are extracted below.

Dear All,

Thank you very much in participating in the first meeting of the Study Group on History of Math. I enjoy very much the sharing we had last Friday though we did not have enough time for an in-depth sharing. I do hope that we can build up this sharing culture, posing questions on the theme and trying to search for solutions of the problems posed in forthcoming meetings of the Study Group. Attached please find the powerpoint file that I presented last Friday, which I guess may be useful for those who could not attend our first meeting.

Below are the points that I can recall on the action forward of the Study Group (please do feel free to add what I miss out):

i) We agree that reading references/books/articles,... is very important to our development and we plan to have sharing of our teaching and learning experience on the theme and our reading experience in the meetings of the Study Group. The meeting will be arranged regularly, hopefully once every two months except very busy school months. (Attached please find the tentative plan of the Study Group)

ii) In between meetings, we can share experiences or pose questions on the theme through e-mails.

iii) The EMB will purchase reference books/CD-ROMs to facilitate the sharing. Attached please find the reference list. Please do add the references that you want us to purchase or you want to share with others.

iv) Mr Leung Chi-kit has produced some learning activities related to history of mathematics. EMB colleagues will reproduce these activities in CD-ROMs and will send to members for their references. Nevertheless, I would be grateful if you could keep these materials for your own uses and not for commercial purposes as we still need some time to polish the materials. If you have already designed some learning activities in the classrooms, please do share with us.

v) The second meeting of the Study Group is tentatively arranged to be held at 9:30 a.m. to 12:30 p.m. on 16 July (Mon). Each member is invited to prepare their sharing on their experiences in the theme (either reading experiences or experiences in incorporating history of math in the classroom).

vi) Feel free to invite other mathematics teachers interested in studying history of mathematics or incorporating history of mathematics in the classroom to join the Study Group. Just send me their names, the schools they work in and their contacts (for easy contacts, please send both phone numbers and e-mails) and tell them the date of our second meeting.

Thank you very much for your participation and looking forward to seeing you on 16 July.

Christine

28 May 2007

Dear Christine (and all friends in the Study Group),

Thank you for calling the meeting and sending us the material after the meeting.

> I wish this Study Group all success. More importantly, I hope all will find their time and effort well-spent and all will enjoy the experience, particularly a kind of 'esprit de corps'.
>
> Man Keung
>
> 29 May 2007

The main programme taken on by the Study Group in the initial stage is to study collectively two famous treatises, namely, Euclid's *Elements* and the ancient Chinese mathematical classics *Jiu Zhang Suan Shu* (九章算術 The Nine Chapters on the Mathematical Art). Members of the Study Group volunteer to present at regular meetings what they have studied from these two treatises, at times mixing with related topics from other sources in line with the objectives of HPM activities. These two primary source treatises are readily accessible. For instance, an English translation of *Elements* with copious commentaries is in the book by Sir Thomas L. Heath (Heath, 1925). An ancient edition of *Jiu Zhang Suan Shu* is in Volume 1 of the collection edited by GUO Shuchun (Guo, 1993), and is well supplemented by a translation into modern Chinese with commentaries by the same author (Guo, 2009). For English readers they can consult an English translation of *Jiu Zhang Suan Shu* together with the commentaries in the book by SHEN Kangshen, John Crossley and Anthony W. C. Lun (Shen & Crossley & Lun, 1999). Interested readers may also like to consult two more books on *Elements* by Robin Hartshorne (Hartshorne, 2000) and C. K. Leung (Leung, 2005). School teachers and even their pupils will enjoy and benefit from the second book if they are serious in studying mathematics and if they can read Chinese. The first book is written for a readership at a more advanced level, but the rich content is worth the effort.

The two famous treaties are chosen for study not only because of their significant roles in the history of mathematics as well as their rich content in mathematics, but also because a detailed study of these two treatises will enable readers to see the different approaches to mathematics that went on in the ancient world in the West and in the East. Broadly speaking it is commonly described as the "dialectic" approach and the "algorithmic" approach respectively, but this is perhaps an over-simplification, although the two approaches and the accompanying development indeed exhibited different features. Tradition holds that Western mathematics, developed by the ancient Greeks, is dialectic, while Eastern mathematics, developed by the ancient Egyptians, Babylonians, Chinese and Indians, is algorithmic. Even if it holds an element of truth as a broad statement, under more refined examination this thesis is an over-simplification. Borrowing the words adopted by Peter Henrici (Henrici, 1974) we can say that dialectic mathematics is a rigorously logical science, in which "statements are either true or false and objects with specified properties either do or do not exist". On the other hand, algorithmic mathematics is a tool for solving problems, in which "we are concerned not only with the existence of a mathematical object but also with the credentials of its existence". In a plenary lecture given in Crete in July of 2002 the author attempted to synthesize the two aspects from a pedagogical viewpoint with examples from historical mathematical developments in Western and Eastern cultures (Siu, 2002). In the 19th ICMI Study Conference held in Taipei in May of 2009 the author reiterated this theme, focusing on proof, and discussed how the two aspects complement and supplement each other in proof activity. A procedural (algorithmic) approach helps to prepare more solid ground on which to build up conceptual understanding; conversely, better conceptual (dialectical) understanding enables one to handle algorithms with more facility, or even to devise improved or new algorithms. Like *Yin* and *Yang* in Chinese philosophy, these two aspects complement and supplement each other, each containing some part of the other (Siu, 2012).

4. Enrichment Seminars for School Teachers

In March of 2010 and in March of 2011 the hard work of members of the Study Group led to two seminars. The first seminar on "Symphony in trigonometry, Opus 360: Chords in harmony," and the second seminar on "Development of number systems," were both closely related to the local school curriculum, hence more than a hundred school teachers came each time. Finding that such kind of seminars received good reception by school teachers this activity gradually becomes an annual event for the Study Group. Since 2012 three more annual seminars had been held. The third one held in 2012 is on area and volume, the fourth one held in 2013 is on probability and the fifth one held in 2014 is on statistics. The sixth one to be held in May of 2015 will be on the topic of infinity. In working on these seminars, the Study Group becomes more strongly aware of how one should examine a topic from three perspectives: a historical perspective, a mathematical perspective, and a pedagogical perspective. Although the three are related, they are not the same; what happened in history may not be the most suitable way to go about teaching it, and what is best from a mathematical standpoint may not be so in the classroom and is almost always not the same as what happened in history. However, the three perspectives complement and supplement each other. For a teacher, it is good to know something about the historical perspective, to have a solid idea of the mathematical perspective, and to focus on the pedagogical perspective. To illustrate this point, let us say a bit more of the first three seminars.

The topic of the first seminar is a good example of a case where the teaching sequence *cannot* follow the path of historical development. Trigonometry arose from studying astronomy and calendar reckoning, which would be too complicated for school mathematics, as it involves spherical trigonometry. However, there are many intersections which make an integration of historical material in the teaching and learning of the subject possible. Trigonometry is also a topic which appears in different areas (geometry, algebra, and calculus) and at different levels so that teachers may wish to know why and how the trigonometric functions seem to look so different in elementary mathematics and in advanced mathematics. Several intricately interwoven themes developed like those in a symphony, sometimes with variations. The seminar was given a playful title, not without a pun in mind! (The word "[half] chord" has an old meaning as the equivalent of the sine function. The word "harmony" has a meaning when trigonometric functions appear in a Fourier series.)

The seminar began with an account of the history of trigonometry from ancient to medieval times, not so much as a comprehensive and technical historical account, but as a sampling of the difficulties ancient peoples struggled with in solving trigonometric problems. Two useful references for this topic are: *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry* (2009) by Glen van Brummelen and *Trigonometric Delights* (1989) by Eli Maor. This was followed by a discussion of the history of trigonometry in China (mostly of the transmission from European mathematics in the 17^{th} and 18^{th} centuries). To integrate these topics with classroom teaching, there was a workshop in making use of historical material in the teaching and learning of trigonometry. This workshop was conducted by several school teachers who shared their own classroom teaching experiences and their own worksheets.

The second seminar was motivated by a picture of the so-called *number tree* that commonly appears in a textbook, which offers a clear, but yet *too clear*, picture of the number system (besides, strictly speaking it is not a tree because the relationship involved is not entirely hierarchical). In the short introductory remarks to the seminar, the author tried to stress the complicated and intricate features of the development of number systems rather than the clear-cut and systematic impression one gathers from a standard number tree. This echoes our own learning experiences from kindergarten to university, in which the notions of different kinds of numbers proceed from vagueness to precision, just as was the case in history. This point was borne out by the remaining part of the seminar, which covered specific topics (integers, rational and irrational numbers, algebraic and transcendental numbers, and complex numbers) that were explained by several school teachers in the context of their classroom experience. The book *Numbers and Infinity: A Historical Account of Mathematical Concepts* (1981) by Ernst Sondheimer and Alan Rogerson is a useful reference, with a more advanced companion *Numbers* (1991, translated from the German original *Zahlen*, 2^{nd} edition, 1988) by Hans-Dieter Ebbinghaus et al. In the concluding remarks of the seminar the author explained and illustrated the three aspects—historical, mathematical, and pedagogical—through three examples taken from the content of the seminar. One was "minus times minus is plus;" the second was "non-unique factorization and prime/irreducible element and ideal numbers;" and the third was "0.9999... equal to 1or not?"

The topic of the third seminar, which comes up in both junior and senior secondary school level or even in primary school level, serves to explain why a teacher would do well to know something about the two treatises *Elements* and *Jiu Zhang Suan Shu*. The seminar began with a talk on the treatment of calculation of area of rectilinear figures in ancient China, followed by the calculation of the area of a circle by the ancient Greeks, followed by the calculation of the volume of certain solids in ancient China. The second part of the seminar compared the calculation of the volume of a sphere in ancient China (*la* LIU Hui in the 3rd century and ZHU Geng in the 6th century) with that in ancient Greece (*la* Archimedes in the 3rd century B.E.C.). In the introductory and concluding remarks the author took the opportunity of discussing the topic of area and volume to explain the point put forth at the end of the preceding Section, namely, in what way the "dialectic" approach and the "algorithmic" approach complement and supplement each other. The seminar ended with an allusion to the modern concept of area and volume developed by Henri Lebesgue and Constantin Carathéodory in the early 1900s and the notion of dimension that was developed by a number of noted mathematicians of the early 20th century, with a brief mentioning of the fascinating topic of fractals, thereby indicating a continuation of the evolution of ideas from ancient to modern times.

5. Nothing Ventured, Nothing Gained

In a local workshop on HPM activities held for school teachers in 2005 the author gave a talk with the title "*Zhi y x ng n n* (knowing is easy and doing is difficult) or vice versa?" The original dictum summarizes a piece of Chinese wisdom that dates back to the ancient classics before our common era. More than two millennia later, Dr. Sun Yat-Sen, founder of the Chinese Republic in 1911, stressed the importance of a positive attitude towards action and deed over a passive attitude of wait-and-see by reversing the word order to *zhi n n x ng y* (knowing is difficult and doing is easy). The dictum was later extended by some eminent scholars to *zhi n n x ng n n* (both knowing and doing are difficult). No matter which of these one agrees with, nobody would be audacious enough to guarantee *zhi y x ng* y ; as the Western saying goes, "nothing ventured, nothing gained", or "there is no such thing as a free lunch"! To engage in HPM activities one has to invest time and effort to equip oneself for the task. There is no substitute for assiduous study on one's own. The author's experience is that knowledge is accumulated by bits and pieces over months and years and is never ending. It is no easy task, but it is meaningful and enjoyable. If we do not get involved or get started, then nothing will be accomplished (Siu, 2014). In an email written to members of the Study Group in April of 2008 the author elaborated on this point:

> Dear members of the Study Group,
>
> Thanks to Christine for arranging a good meeting yesterday. Even though the number of participants was not as large as expected, we did have a fruitful

discussion. Chi Kit, in his usual frankness which I respect and like, put his finger on the crucial question on participation and suggested that frequent absence of a member should be taken to mean a loss of interest in the study group or heavy commitment elsewhere (or both) so that in any case he or she can be left out in the mailing list. I take a more 'lenient' stand and see 'interest' in a wider context.

There are various levels of interest. Some have a really deep interest, like that of Chi Kit (or of my humble self), so much so that they are willing to put in the time and effort to study relevant material, including primary sources (still not to the extent of a real professional historian of mathematics, of course). Some are building up this kind of interest. Some are interested in building up this kind of interest but do not know how to start. We should welcome everybody with that intent. We are all learning along the way. Anyone who expresses such intent, either in coming to meetings or in exchanging emails, is welcome to be an active member of the group. If a member loses interest in the study group or has heavy commitment elsewhere, then he or she would not mind being left out from the mailing list anyway.

Let me quote from an email I wrote to a colleague in the EDB on December 20, 2007:

"Do not regard me as an expert. I am merely a mathematics teacher who happens to work along that line earlier than most. To a large extent I must admit that I have been very fortunate in that I could enjoy that kind of 'luxury' in spending my time and effort on this kind of endeavour when I joined the University of Hong Kong in the mid-1970s. Had I joined the tertiary community two decades later, I would have to spend my time on keeping my head above water (and to keep my job) by concentrating on some (small) part of technical mathematics. Experience in this kind of endeavour comes in bits and pieces, and knowledge is accumulated in months and years, and never ending. It is no easy task, but it is meaningful and enjoyable. All I know is that if we do not get involved or get started, then nothing would be accomplished. Hence, I would not be able to answer all queries; nobody can. But I am always ready to contribute whatever I am capable of doing. I look forward to the study group meeting on Friday."

As long as we feel happy (and at ease) with such meetings, I think it is worthwhile to keep it up. As I have always suggested, we can supplement with email exchanges in between. Time (and priority) is definitely a crucial factor. The HPM (History and Pedagogy of Mathematics) group in Taiwan, led by my friend Wann-Sheng (HORNG), has done very fruitful work. However, there is one factor our study group can hardly be matched up to them. Besides the dedication of members of that group, the group is built up and is formed by PhD and MA students who write their thesis on those topics. In this sense, they pursue their interest along with their daily research and study. For members of our group, the time and effort spent is "extra", so to speak. Perhaps I also quote from another email I wrote you on January 7, 2008 and on January 22, 2008:

"Actually, I am thinking that perhaps the study group can contemplate building up some sort of website to accommodate material which members may find useful. We already have a batch of such material gathered so far, such as lists of references, powerpoint files, work sheets, capsules (like those developed by Chi Kit), annotated syllabus prepared by Christine, etc. We can also edit the exchange of emails between some of us on the planning and the objectives of the study group. New material will be added as time goes on. When a new member joins the group, he or she will be given a link to that website. This would be one way to generate 'solidarity' of the group and to encourage discussion among members via email."

"The enthusiasm of the study group in the December meeting was not as high as before, probably because everybody is too much occupied with other things. Maybe the establishment of a 'chat room' can help to boost the mutual morale from time to time. This is what I suggested in my email dated January 7. Face-to-face meeting certainly has its merit. But when everybody is busy with what each has to take up in respective positions, assigning "homework" for the meeting can easily turn into a 'burden', which would further diminish the enthusiasm. I guess that is what Chi Kit means in maintaining that we should just go forward without assigning any goalpost but let things develop as we go forward. Hence, upkeeping the morale and affinity would be important. Christine has already provided strong support in building up a good library, collecting relevant material and distributing it to all, and in forming such a group. The question is how to maintain the enthusiasm and to convey the experience to a larger community. Keep going cheerfully! (Years ago there was no such group at all.)"

Hope to meet again in May or June. I will be out of town from April 13 to April 30, spending the two-and-half-week in Greece. Have a nice weekend.

Man Keung

April 4, 2008

Notes

1. The term HPM has become a shortened acronym for ISGRHPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics), which was established in 1976 as an affiliation of ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). In this paper HPM is used in a broader sense to describe activities pertaining to the objectives and interests of the group, but not necessarily directly sponsored by the group. (For more detailed information about the group and its activities readers are referred to the official HPM website http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/.)
2. The Education Department was renamed as the Education and Manpower Bureau (EMB) in July of 1997 when the sovereignty of Hong Kong returned to China. It was renamed again in July of 2007 as the Education Bureau (EDB) after the protocol of manpower was moved to another Bureau.

References

Fauvel, J. & J. van Maanen (Eds.) (2000) *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Guo, S. C. (Ed.) (1993) *Collection of Chinese Classics in Science and Technology (Mathematics), Volume 1-5* [in Chinese 中國科學技術典籍通彙(數學卷)]. Zhengzhou: Henan Educational Press.

Guo, S. C. (2009). *Translation and Annotation of Jiuzhang Suanshu* [in Chinese 九章算術譯注]. Shanghai: Shanghai Antique Books.

Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond*. Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Heath, T. L. (1925). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 2nd edition, Cambridge: Cambridge University Press.

Henrici, P. (1974). Computational complex analysis, *Proc. Symp. Appl. Math*. 20, 79-86.

Leung, C. K. (2005). *A Guided Reading of Euclid's Elements* [in Chinese 幾何原本導讀]. Taipei: Chiu Chang Publishing.

Shen, K. S., J. N. Crossley &, A. W. C. Lun (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford: Oxford University Press.

Siu, M. K. (1994). My view on "Mathematics for all." [in Chinese 我看「大眾數學」]. In S. Yan, J. (Ed.), *Mathematics education in China for the 21st century* [in Chinese 面向21世紀的中國數學教育] (pp. 256-265). Nanjing: Jiangsu Educational Press.

Siu, M. K. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. (Original work published 1997). In V. Katz (Ed.), *Using History To Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 3-9). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Siu, M. K. (2002). "Algorithmic Mathematics" and "Dialectic Mathematics": The *Yin* and *Yang* in mathematics education. In C. Tzanakis et al (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)* (in CD-ROM). New York: John Wiley.

Siu, M. K. (2012). Proof in the Western and Eastern traditions: Implications for mathematics education. In G. Hanna, M.de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (pp.431-440). New York-Heidelberg: Springer-Verlag.

Siu, M. K. (2014). "*Zhi yi xing nan* (knowing is easy and doing is difficult) or vice versa? —- A Chinese mathematician's observation on HPM (History and Pedagogy of Mathematics) activities, in *The First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India,* edited by B.

Sriraman, Cai, J.F., K. Lee, L. Fan, Y. Shimuzu, C. Lim, K. Subramanian, Charlotte: Information Age Publishing.

Siu, M. K. & C. Tzanakis, (2004). History of mathematics in classroom teaching—Appetizer? Main course? Or dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *3* (1-2), v-x.

ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ: ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΙΣΤΟΡΙΚΩΝ ΠΗΓΩΝ

Ματθαίος Αναστασιάδης
Κάτοχος Μεταπτυχιακού Διπλώματος, Π.Τ.Δ.Ε.
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής, Π.Τ.Δ.Ε.
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Abstract

In this research, we used one historical note and two primary sources, from Pappus' Collection and from Polybius' Histories, in the context of an instructional intervention focused on isoperimetric figures and area-perimeter relationships. The participants were 22 students from a sixth grade class. The material presented here is based on classroom observations, worksheets and interviews with the students. During the intervention, the students solved problems, which were based on the sources. Twenty-one of the 22 students considered the problem which was based on Pappus' text to be more interesting compared to the usual mathematical problems. Additionally, based on students' ratings of the texts, Pappus' text was the one that they liked most. Students' difficulties and the different ways through which the sources affected the development of students' Geometrical Work Spaces are also examined.

Keywords

History of Mathematics, primary sources, isoperimetric figures, area, Geometrical Work Spaces.

Περίληψη

Στην έρευνα αυτή χρησιμοποιήθηκαν ένα ιστορικό σημείωμα και δύο πρωτογενείς πηγές, από τη Συναγωγή του Πάππου και τις Ιστορίες του Πολύβιου, στο πλαίσιο μιας διδακτικής παρέμβασης για τα ισοπεριμετρικά σχήματα και τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού. Συμμετέχοντες ήταν 22 μαθητές από ένα τμήμα της ΣΤ' τάξης. Τα ευρήματα που παρουσιάζονται εδώ προέρχονται από παρατηρήσεις από τη διδασκαλία, από φύλλα εργασίας και από συνεντεύξεις με τους μαθητές. Στα μαθήματα, οι μαθητές έλυσαν προβλήματα βασισμένα στις πηγές. Οι 21 από τους 22 μαθητές έκριναν το πρόβλημα που βασιζόταν στο κείμενο του Πάππου ως πιο ενδιαφέρον σε σχέση με τα συνήθη μαθηματικά προβλήματα. Επιπλέον, βάσει της

αξιολόγησης των τριών κειμένων από τους μαθητές, το κείμενο του Πάππου ήταν εκείνο που οι μαθητές άρεσαν περισσότερο. Στο άρθρο εξετάζονται, επίσης, οι δυσκολίες των μαθητών και οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους επηρέασαν οι πηγές την ανάπτυξη των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας των μαθητών.

Λέξεις-κλειδιά

Ιστορία των Μαθηματικών, πρωτογενείς πηγές, ισοπεριμετρικά σχήματα, εμβαδόν, Γεωμετρικοί Χώροι Εργασίας.

0. Εισαγωγή

Η έρευνα αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, που συνδέει τη διδακτική αξιοποίηση ιστορικών πηγών με τη θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (Kuzniak, 2006), στο πλαίσιο μιας διδακτικής παρέμβασης με θέμα τα ισοπεριμετρικά σχήματα. Η παρούσα επιμέρους έρευνα επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο αξιοποιήθηκαν οι πηγές και εξετάζονται οι δυσκολίες των μαθητών και οι απόψεις τους τόσο για τη μάθησή τους, όσο και για τη διδακτική αξιοποίηση των συγκεκριμένων ιστορικών πηγών.

Στην εξέτασή των ισοπεριμετρικών σχημάτων, δηλαδή γεωμετρικών σχημάτων με ίσες περιμέτρους, εμπλέκονται οι έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού και οι μεταξύ τους σχέσεις. Σχετικά με αυτές τις έννοιες, αρκετές έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν τους τύπους εις βάρος άλλων στρατηγικών, κάνουν λάθη στην εφαρμογή τους και δεν κατανοούν το αποτέλεσμα, συγχέουν την περίμετρο με το εμβαδόν, πιστεύουν αφενός ότι ίση περίμετρος συνεπάγεται ίσο εμβαδόν και αντιστρόφως και αφετέρου ότι η περίμετρος και το εμβαδόν εξαρτώνται άμεσα το ένα από το άλλο – δηλαδή ότι μικρότερη ή μεγαλύτερη περίμετρος συνεπάγεται το αντίστοιχο και για το εμβαδόν και αντιστρόφως – ενώ έχει αναφερθεί ότι οι παρανοήσεις για τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού συχνά επανέρχονται μετά τη διδασκαλία (Douady & Perrin-Glorian, 1989, Moreira-Baltar & Comiti, 1994, Vighi, 2010, Zacharos, 2006). Αυτές οι δυσκολίες, μάλιστα, ως προς τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού παρατηρούνται ακόμα και σε μεγαλύτερους μαθητές και σε ενήλικες (Kellogg, 2010, Woodward & Byrd, 1983).

1. Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση

Για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών υπάρχουν, από τη μια πλευρά, θεωρητικές αντιρρήσεις και πρακτικές δυσκολίες: π.χ. υποστηρίζεται ότι οι μαθητές δεν αγαπούν την Ιστορία ή ότι η Ιστορία των Μαθηματικών θα μπορούσε να μπερδέψει τους μαθητές (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000). Πρακτικές δυσκολίες είναι η έλλειψη διδακτικού χρόνου και υλικού και η έλλειψη γνώσεων από πλευράς των εκπαιδευτικών. Επιπλέον, μια τέτοια αξιοποίηση είναι δύσκολο να αξιολογηθεί, οπότε δε θα κέρδιζε την προσοχή των μαθητών.

Από την άλλη, προβάλλεται ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να κινητοποιήσει τους μαθητές, συντελώντας ταυτόχρονα στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών περιεχομένων (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000). Επιπλέον, πληροφορούμενοι για δυσκολίες, σφάλματα και παρανοήσεις του παρελθόντος, οι μεν μαθητές μπορούν να έχουν οφέλη σε επίπεδο συναισθημάτων και στάσεων, ενώ οι εκπαιδευτικοί μπορούν να κάνουν εκτιμήσεις για πιθανές δυσκολίες των μαθητών και να εμπνευστούν προβλήματα και άλλο υλικό που θα μπορούσε να συμβάλει στην υπέρβαση αυτών των δυσκολιών. Παράλληλα, η Ιστορία των Μαθηματικών βοηθά στην αλλαγή των πεποιθήσεων για τα Μαθηματικά, τονίζει το ρόλο των ανθρώπων και των πολιτισμών στην εξέλιξή τους και διδάσκει ότι οι μαθηματικές έννοιες αναπτύχθηκαν ως εργαλεία για την οργάνωση του κόσμου. Τέλος, μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών συνδέονται τα Μαθηματικά με άλλα γνωστικά αντικείμενα.

Αναφορικά με τη σχέση των δυσκολιών των μαθητών με τις δυσκολίες που εμφανίζονται στην Ιστορία των Μαθηματικών, υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις. Ο Brousseau (2002), με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου, τόνισε το ρόλο μιας δεδομένης γνώσης, που με τα χαρακτηριστικά της συνεπάγεται συγκεκριμένα πλεονεκτήματα, αλλά οδηγεί εκ ων πραγμάτων και σε συγκεκριμένα σφάλματα. Αντίθετα, οι Furinghetti και Radford (2008) τόνισαν το ρόλο του πολιτισμού και υποστήριξαν ότι μέσω του σχολείου προετοιμάζεται το «ξεπακετάρισμα» μιας συμπυκνωμένης παράδοσης αιώνων. Τέλος, στο πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, θεωρείται ότι οι ιδέες των μαθητών μπορεί να προέρχονται από την αλληλεπίδρασή τους με το φυσικό περιβάλλον και τα εργαλεία του πολιτισμού (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006). Συνεπώς, τυχόν ομοιότητες θα μπορούσαν να συνδέονται π.χ. με την αντίληψη που παρέχουν οι αισθήσεις ή με τη χρήση παρόμοιων εργαλείων.

Σχετικά με τους τρόπους αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών, ο συνηθέστερος είναι η χρήση ιστορικών σημειωμάτων, δηλαδή κειμένων που κατασκευάζονται για διδακτικούς σκοπούς και μπορεί να περιλαμβάνουν ονόματα, χρονολογίες, βιογραφίες, ανέκδοτα ή και αφηγήσεις (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000). Άλλοι τρόποι είναι τα φύλλα εργασίας, τα ιστορικά προβλήματα και οι πρωτογενείς και δευτερογενείς πηγές. Οι παραπάνω τρόποι μπορούν να συνδυαστούν για το σχεδιασμό διδακτικών-μαθησιακών σειρών (πακέτων) και projects, σύντομων ή εκτενέστερων και με μικρότερη ή μεγαλύτερη συνάφεια με το ισχύον πρόγραμμα σπουδών.

Η χρήση πρωτογενών πηγών είναι ο πιο απαιτητικός και χρονοβόρος τρόπος, ενώ συχνά είναι δύσκολη και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων (Jahnke et al., 2000). Ο εκπαιδευτικός ενδέχεται να πρέπει να μεταφράσει ή να τροποποιήσει το κείμενο, αλλά συστήνεται να μην απομακρύνεται πολύ από το αυθεντικό κείμενο. Η εισαγωγή της πηγής μπορεί να γίνει άμεσα, χωρίς προηγούμενη προετοιμασία, ή έμμεσα, π.χ. μετά από επίλυση προβλημάτων. Γενικότερα, για την αξιοποίηση των πρωτογενών πηγών δεν υπάρχει μόνο μία διδακτική στρατηγική συνεπώς, θα πρέπει να επιλέγεται η καταλληλότερη.

2. Οι Σχέσεις Περιμέτρου-Εμβαδού στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Αρκετές μαρτυρίες δείχνουν ότι οι σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού προκαλούσαν δυσκολίες και κατά το παρελθόν. Για παράδειγμα, ο Πολύβιος από τη Μεγαλόπολη (2^{ος} αι. π.Χ.), στο 9^{ο} βιβλίο των *Ιστοριών* του, υποστήριξε ότι οι στρατηγοί θα πρέπει να έχουν και βασικές γνώσεις Αστρονομίας και Γεωμετρίας και για να το τεκμηριώσει ανέφερε και τα εξής: «Οι περισσότεροι άνθρωποι υπολογίζουν τα μεγέθη των προαναφερομένων [πόλεων και στρατοπέδων] μόνο από την περίμετρο. (....) Ο λόγος για αυτό είναι ότι δε θυμούμαστε τα μαθήματα Γεωμετρίας που είχαμε διδαχτεί στα παιδικά μας χρόνια» (*Hist*. 9.26a.1-4, Büttner-Wobst ed.).[1] Μάλιστα, έδωσε δύο παραδείγματα: το πρώτο αφορά τη σύγκριση μεταξύ Σπάρτης και Μεγαλόπολης, ενώ το δεύτερο αφορά μια υποθετική πόλη ή στρατόπεδο, που ενώ έχει περίμετρο 40 σταδίων, είναι διπλάσια από μια άλλη με περίμετρο 100 σταδίων.

Σύμφωνα με τον Walbank (1967), «τα μεγέθη» είναι το εμβαδόν της κάθε πόλης. Επιπλέον, το πρώτο παράδειγμα έχει ιδιαίτερο ιστορικό ενδιαφέρον, καθώς η σύγκριση φαίνεται να μην επιβεβαιώνεται για το εμβαδόν, τουλάχιστον με τα υπάρχοντα αρχαιολογικά ευρήματα. Αντίθετα, το δεύτερο παράδειγμα αναφέρεται σε ακραίες περιπτώσεις και έχει περισσότερο μαθηματικό ενδιαφέρον.

Η αναφορά του Πολύβιου στα «μαθήματα Γεωμετρίας» δείχνει ότι οι σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού είχαν ήδη απασχολήσει τους μαθηματικούς. Ήδη, ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* είχε αποδείξει ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται στην ίδια βάση ή σε ίσες βάσεις και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, είναι ίσα το ένα με το άλλο και, ακολούθως, απέδειξε το ίδιο και για τα τρίγωνα (1.35-38). Τα θεωρήματα αυτά συνεπάγονται ότι η επιφάνεια του παραλληλογράμμου και του τριγώνου δεν εξαρτάται από την περίμετρο.

Με την ισοπεριμετρία ασχολήθηκε και ο Ζηνόδωρος (πιθανόν 2^{ος} αι. π.Χ.). Η πραγματεία του για τα ισοπεριμετρικά σχήματα δε σώζεται όμως, βάσει όσων παρέθεσε αργότερα ο Θέων, ο Ζηνόδωρος απέδειξε ως προς τα επίπεδα σχήματα ότι από όλα τα κανονικά πολύγωνα με ίση περίμετρο, το μεγαλύτερο είναι αυτό με τις περισσότερες γωνίες και ότι αν ένας κύκλος έχει ίση περίμετρο με ένα κανονικό πολύγωνο, τότε ο κύκλος είναι μεγαλύτερος (Cooke, 2005, Heath, 1921). Επιπλέον, έδειξε ότι από όλα τα ισοπεριμετρικά πολύγωνα με ίσο αριθμό γωνιών, το μεγαλύτερο είναι το ισόπλευρο και ισογώνιο, αλλά για την απόδειξη βασίστηκε μερικώς σε ένα λήμμα που δεν είχε αποδείξει με γενικό τρόπο.

Η ισοπεριμετρία αποτελεί και το βασικό θέμα του Ε′ βιβλίου της *Συναγωγής* ή *Μαθηματικής Συλλογής* του Πάππου (4ος αι. μ.Χ.). Το Α′ μέρος του βιβλίου αφορά τα επίπεδα σχήματα και ξεκινά με μια εισαγωγή, που χαρακτηρίζεται από υψηλή λογοτεχνική αξία (Cooke, 2005, Heath, 1921) και κεντρίζει το ενδιαφέρον. Το θέμα της είναι το εξαγωνικό σχήμα των κελιών από τις κηρήθρες. Η τελεολογική θεώρηση είναι εδώ ευδιάκριτη, καθώς αποδίδεται σκοπιμότητα στην επιλογή του σχήματος από τις μέλισσες. Με αυτό ως αφορμή, ο Πάππος διατυπώνει στο κλείσιμο της εισαγωγής ένα μαθηματικό πρόβλημα:

> (....) Οι μέλισσες, λοιπόν, γνωρίζουν μόνο αυτό που είναι χρήσιμο σε αυτές. Δηλαδή, ότι το εξάγωνο είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο και το τρίγωνο και μπορεί να χωρέσει περισσότερο μέλι, με την ίδια δαπάνη υλικών για την κατασκευή καθενός. Εμείς, ωστόσο, ισχυριζόμενοι ότι κατέχουμε μεγαλύτερο μερίδιο σοφίας από τις μέλισσες, θα ερευνήσουμε κάτι ευρύτερο. Δηλαδή, ότι από όλα τα ισόπλευρα και ισογώνια επίπεδα σχήματα που έχουν ίση περίμετρο, μεγαλύτερο είναι πάντοτε αυτό που έχει το μεγαλύτερο αριθμό γωνιών. Και το μεγαλύτερο από όλα είναι ο κύκλος, εφόσον έχει ίση περίμετρο με αυτά. (*Συναγωγή* Ε′.3, Hultsch ed.)

Κατά την Cuomo (2000), το Ε′ βιβλίο εντασσόταν πιθανότατα σε ένα πλαίσιο ανταγωνισμών για την οικειοποίηση της παράδοσης, την απόκτηση φήμης και την προσέλκυση μαθητών. Στις μέλισσες αναφέρονταν συχνά και οι φιλόσοφοι για τον Πάππο, η διαφορά μεταξύ μελισσών και ανθρώπων είναι ότι οι μέλισσες διαθέτουν γνώση περιορισμένη, χρήσιμη και ενστικτώδη, ενώ οι άνθρωποι έχουν την ικανότητα και το ενδιαφέρον για την απόδειξη. Μέσα από την εισαγωγή, λοιπόν, αναδεικνύεται η ανάγκη για την απόδειξη των ισοπεριμετρικών θεωρημάτων στα επίπεδα σχήματα, στην οποία προβαίνει ο Πάππος ακολούθως στο πλαίσιο της ευκλείδειας παράδοσης. Στην αποδεικτική πορεία, αν και απουσιάζει οποιαδήποτε αναφορά στον Ζηνόδωρο, φαίνεται ότι ο Πάππος ακολούθησε το έργο εκείνου, ιδίως στα επίπεδα σχήματα, προσθέτοντας όμως και δικές του προτάσεις και αποδείξεις (Heath, 1921).

Η εισαγωγή του Πάππου για τις μέλισσες σχετίζεται και με το πρόβλημα που έμεινε αργότερα γνωστό ως υπόθεση της κηρήθρας. Βάσει της εικασίας, που αποδείχθηκε πληρέστερα από τον Hales (2001), η κάλυψη του χώρου με κανονικά εξάγωνα, όπως συμβαίνει στις κηρήθρες, είναι αυτή που επιτυγχάνει την ελάχιστη περίμετρο, για οποιοδήποτε διαμερισμό του επιπέδου σε περιοχές ίσης επιφάνειας.

3. Θεωρητικό Πλαίσιο για το Σχεδιασμό της Διδασκαλίας

Όσον αφορά το εμβαδόν, έχει τονιστεί η ανάγκη οι μαθητές να κατανοούν ότι αποτελεί ιδιότητα και προτείνονται οι μετρήσεις του εμβαδού με δισδιάστατες μονάδες, οι συγκρίσεις σχημάτων, η τοποθέτηση ενός σχήματος πάνω στο άλλο και η αποκοπή-επικόλληση των περίσσιων τμημάτων και, τέλος, η εξέταση των σχέσεων περιμέτρου-εμβαδού (Douady & Perrin-Glorian, 1989, Nunes et al., 1993, Van de Walle & Lovin, 2006). Μάλιστα, σε αμερικανικά προγράμματα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, όπως αυτό του North Carolina Department of Public Instruction (2012) και του Georgia Department of Education (2014), οι σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού διερευνώνται από την 3η κιόλας τάξη.

Στην παρούσα έρευνα οι έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού εξετάστηκαν από τη σκοπιά της Γεωμετρίας, για αυτό και χρησιμοποιήθηκε η θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (Kuzniak, 2006, 2012). Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας (ΓΧΕ) είναι ο χώρος που έχει οργανωθεί με τρόπο που να καθίσταται εφικτή για το χρήστη του χώρου – μαθηματικό, φοιτητή ή μαθητή – η επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Συνεπώς, τα προβλήματα αποτελούν το λόγο ύπαρξης των ΓΧΕ. Διακρίνονται τρία επίπεδα: ο ΓΧΕ αναφοράς, που καθορίζεται από μια κοινότητα μαθηματικών ή στην εκπαίδευση από το πρόγραμμα σπουδών, ο κατάλληλος ΓΧΕ, που σχεδιάζεται από τον διδάσκοντα για μια δεδομένη τάξη, και ο προσωπικός ΓΧΕ, που αναπτύσσεται στην πράξη από τον τελικό χρήστη, εν προκειμένω τον κάθε μαθητή. Διακρίνονται, επίσης, διαφορετικά επιστημολογικά παραδείγματα. Εδώ, μας ενδιαφέρει η Γεωμετρία 1 (GI) – όπου κυριαρχεί ο πειραματισμός και επιτρέπονται οι πρακτικές αποδείξεις, οι μετρήσεις, η χρήση αριθμών και οι κατά προσέγγιση απαντήσεις – και η Γεωμετρία 2 (GII), με αρχέτυπο την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ο ΓΧΕ περιλαμβάνει τρία συστατικά: α) το χώρο με τα σχήματα, β) τα τεχνουργήματα-εργαλεία και γ) το θεωρητικό σύστημα αναφοράς, με τους ορισμούς και τις ιδιότητες. Σε ένα δεύτερο, γνωστικό επίπεδο εντάσσονται τρία είδη διαδικασιών: η οπτικοποίηση, η κατασκευή και η απόδειξη. Στην οπτικοποίηση περιλαμβάνεται και η ανασύνθεση των σχημάτων με υλικό τρόπο ή με ανα-οργανωτικές γραμμές ή μόνο με το βλέμμα (Duval, 2005).

Όσον αφορά τις εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών, ο Brousseau (2002) έχει υποστηρίξει ότι η υπέρβαση ενός εμποδίου απαιτεί την εμπλοκή των μαθητών στην επίλυση επιλεγμένων προβλημάτων, μέσω των οποίων οι μαθητές θα διαπιστώσουν την αναποτελεσματικότητα μιας γνώσης ή αντίληψης. Σημείωσε, όμως, ότι τα προβλήματα πρέπει να επιλέγονται με τρόπο που οι μαθητές να κινητοποιούνται και, ακολούθως, να δρουν, να συζητούν και να σκέφτονται, προκειμένου να τα επιλύσουν.

Επιπλέον, τα λεγόμενα εποικοδομητικά μοντέλα διδασκαλίας έχουν τονίσει την ανάγκη η διδασκαλία να κλείνει με μια μεταγνωστική φάση, στην οποία «ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να του περιγράψουν την παλιά και τη νέα τους γνώση και να αντιληφθούν τις διαφορές της» (Καριώτογλου, 2006: 36). Μια πρακτική που μπορεί να βοηθήσει στην αλλαγή των ιδεών των μαθητών είναι και η χρήση κειμένων αντιπαράθεσης (refutation texts) (Tippett, 2010). Σε αντίθεση με τα παραδοσιακά κείμενα, που απλώς εκθέτουν και επεξηγούν την ισχύουσα επιστημονική άποψη, τα κείμενα αντιπαράθεσης παραθέτουν επιπλέον και κάποια διαδεδομένη εναλλακτική ιδέα, αναφέροντας ότι είναι εσφαλμένη. Για την αξιοποίηση αυτών των κειμένων προτείνεται ο συνδυασμός τους με συζητήσεις και άλλες δραστηριότητες, καθώς η αλλαγή των απόψεων είναι δύσκολη υπόθεση και κανένα κείμενο από μόνο του δεν επαρκεί για να επιτευχθεί αυτό με όλους τους μαθητές.

Αναφέρθηκε παραπάνω η αξία της κινητοποίησης των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων και επισημάνθηκε ότι η κινητοποίηση αποτελεί ένα συνήθη στόχο κατά την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Εξάλλου, από τη σκοπιά της ψυχολογίας των κινήτρων, οι Schunk et al. (2010) σύστησαν μεταξύ άλλων να χρησιμοποιείται υλικό από πρωτότυπες πηγές. Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά των κειμένων που προκαλούν το ενδιαφέρον, οι Schraw et al. (1995) επεσήμαναν το ρόλο της ευκολίας κατανόησης και της ζωντάνιας και παραστατικότητας του κειμένου. Επιπλέον, έχει βρεθεί πως μαθητές και εκπαιδευτικοί έκριναν ότι η μεγαλόφωνη ανάγνωση ενός κειμένου από τον εκπαιδευτικό το κάνει πιο ενδιαφέρον και ενισχύει την κατανόηση (Ariail & Albright, 2006, Ivey & Broaddus, 2001). Άλλοι παράγοντες που έχει επισημανθεί ότι μπορούν να προκαλέσουν το ενδιαφέρον είναι οι νεωτερισμοί, η ομαδική εργασία, οι πρακτικές δραστηριότητες, ορισμένα θέματα που σχετίζονται με τη φύση, η απόδοση νοήματος στη δραστηριότητα και η ισορροπία ανάμεσα στο βαθμό πρόκλησης και στο επίπεδο των γνώσεων και ικανοτήτων ενός ατόμου (Bergin, 1999, Mitchell, 1993, Schunk et al., 2010).

4. Μεθοδολογία Έρευνας

Συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν ένα τμήμα της ΣΤ′ τάξης με 22 μαθητές από εργατική περιοχή της Θεσσαλονίκης. Τα δεδομένα που παρουσιάζονται προέρχονται από φύλλα εργασίας, από παρατηρήσεις από τη διδασκαλία και από ατομικές συνεντεύξεις με τους μαθητές. Οι διδασκαλίες πραγματοποιήθηκαν από τον έναν ερευνητή στην κανονική τάξη των μαθητών, ενώ η εκπαιδευτικός της τάξης ήταν παρούσα ως παρατηρήτρια. Εξαίρεση αποτελεί η επίλυση του κύριου μαθηματικού προβλήματος, όπου προτιμήθηκε να μην εργαστούν οι ομάδες συγχρόνως, αλλά διαδοχικά, για μία διδακτική ώρα η καθεμιά, σε άλλη αίθουσα του σχολείου. Αυτό έγινε για να καταστεί εφικτή η παρατήρηση του τρόπου εργασίας και των δυσκολιών της κάθε ομάδας και των μελών της. Η διάρκεια της παρέμβασης ήταν έξι διδακτικές ώρες στην κανονική τάξη και μία διδακτική ώρα για κάθε ομάδα σε άλλη αίθουσα.

4.1. Σχεδιασμός του κατάλληλου ΓΧΕ

Η παρέμβαση προτιμήθηκε να υλοποιηθεί προτού οι μαθητές διδαχθούν την Ενότητα του βιβλίου που αφορά τη Γεωμετρία, ώστε να μην έχουν διδαχθεί τον τύπο εμβαδού του γενικού τριγώνου και του τραπεζίου και για να μην επηρεαστούν οι μαθητές από την έμφαση που δίνει το βιβλίο στους τύπους.

Σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών, επιλέχτηκαν δύο πρωτογενείς πηγές: η πρώτη ήταν η εισαγωγή στο Α′ μέρος του Ε′ βιβλίου της *Συναγωγής* του Πάππου (Ε′.1-3) και η δεύτερη ήταν από τις *Ιστορίες* του Πολύβιου (9.26a.1-6). Επιπλέον, επιλέχτηκε από το βιβλίο της ΣΤ′ τάξης ένα ιστορικό σημείωμα με τον τίτλο «Γεωμετρία» (Κασσώτη κ.ά., 2006: 136), ώστε να συνδέσουν οι μαθητές το περιεχόμενο της παρέμβασης με ό,τι διδάσκεται στη σχετική Ενότητα του βιβλίου.

Δεδομένου ότι οι μαθητές στο Δημοτικό δε γνωρίζουν αρχαία ελληνικά, επιλέχτηκε να παρουσιαστούν οι πηγές μεταφρασμένες. Κατά τη μετάφραση, χρησιμοποιήθηκαν λέξεις και φράσεις κατά το δυνατόν κοντά στα πρωτότυπα κείμενα, ενώ σε άλλες περιπτώσεις προτιμήθηκαν περίοδοι λόγου λιγότερο μακροσκελείς, ώστε να είναι τα μεταφρασμένα κείμενα κατάλληλα για τους μαθητές, χωρίς να απομακρύνονται από τα αυθεντικά (Jahnke et al., 2000). Ακόμη, βάσει των στόχων της παρέμβασης, δε συμπεριελήφθησαν από το κείμενο του Πάππου η προσφώνηση «κράτιστε Μεγεθίον» (*Συναγωγή* Ε′.1), η αναφορά στον κύκλο (Ε′.3) και η λεπτομερής αιτιολόγηση της θέσης ότι, από τα κανονικά σχήματα, υπάρχουν μόνο τρία που καλύπτουν εντελώς μια επιφάνεια χωρίς επικαλύψεις και κενά (Ε′.2). (Τα μεταφρασμένα κείμενα που παρουσιάσθηκαν στους μαθητές βρίσκονται σε **Παράρτημα** στο τέλος του άρθρου.)

Το κείμενο του Πάππου, ως ιστορική πηγή, δεν εισήχθη άμεσα, αφού προηγούνταν ως εισαγωγή η αξιοποίηση του ιστορικού σημειώματος. Αναλυτικότερα, ο σχεδιασμός προέβλεπε να αναγνωστεί το ιστορικό σημείωμα, να σχολιαστεί σύντομα και να επεκταθεί με βασικές πληροφορίες για τον Πάππο και την εποχή του. Για το κείμενο του Πάππου, προτιμήθηκε μια διαφορετική προσέγγιση: διατύπωση ερωτήσεων από τον εκπαιδευτικό, μεγαλόφωνη ανάγνωση του κειμένου από τον εκπαιδευτικό χωρίς οι μαθητές να έχουν το κείμενο μπροστά τους και απάντηση των ερωτήσεων-συζήτηση. Ακολούθως, υπήρχε η πρόβλεψη οι μαθητές να πάρουν το κείμενο σε φωτοτυπία και να υπογραμμίσουν λέξεις και φράσεις σχετικές με τα Μαθηματικά. Ο στόχος ήταν να ενεργοποιηθούν έτσι οι γεωμετρικές ιδιότητες που χρειάζονταν για τη διαμόρφωση του ΓΧΕ: τι είναι το πολύγωνο και τι κανονικό πολύγωνο, ποια είναι τα κανονικά σχήματα που καλύπτουν πλήρως την επιφάνεια χωρίς επικαλύψεις ή κενά, τι είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο, τι είναι περίμετρος και εμβαδόν, ποια σχήματα λέγονται ισοπεριμετρικά και πώς σχετίζεται με τα Μαθηματικά η απόδειξη.

Ακολούθως, σχεδιάστηκε να τεθεί ένα πρόβλημα, βάσει του οποίου οι μαθητές έπρεπε να συγκρίνουν τα εμβαδά ισοπεριμετρικών σχημάτων, ώστε να διαπιστώσουν αν όντως ισχύει ο ισχυρισμός του Πάππου ότι το κελί σε σχήμα κανονικού εξαγώνου χωράει περισσότερο μέλι σε σχέση με άλλα σχήματα που καλύπτουν εντελώς το χώρο.

Στη φάση πειραματισμού προβλεπόταν η επίλυση του προβλήματος από τους μαθητές κατά ομάδες, με διαφορετικές μεθόδους:

1η: Άμεση σύγκριση με τοποθέτηση του ενός σχήματος πάνω στο άλλο και αποκοπή-επικόλληση των περίσσιων τμημάτων.

2η: Έμμεση σύγκριση με πλακόστρωση ίσων επιφανειών (αντίστροφη αναλογία: μεγαλύτερο το σχήμα που επαναλαμβάνεται λιγότερες φορές).

3η: Μέτρηση με ημιδιαφανές τετραγωνικό πλέγμα.

4η: Υπολογισμός με τύπους.

Τα γεωμετρικά σχήματα ήταν κανονικά πολύγωνα με τρεις, τέσσερις και έξι γωνίες, αλλά και μη κανονικά (μακρόστενο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο). Τα σχήματα αυτά κρίθηκε σκόπιμο να δοθούν κομμένα σε χαρτόνι, ώστε να διευκολυνθούν οι ανασυνθέσεις, ενώ δεν υπήρχαν αριθμητικές ενδείξεις για τα μήκη των πλευρών. Έτσι, οι μαθητές έπρεπε να μετρήσουν τις πλευρές και να υπολογίσουν την περίμετρο του κάθε σχήματος και έπειτα να εφαρμόσουν την προτεινόμενη μέθοδο για τις συγκρίσεις των εμβαδών (GI). Τα εργαλεία που κρίθηκε σκόπιμο, κατά περίπτωση ανάλογα με τη μέθοδο, να βρίσκονται διαθέσιμα ήταν: βαθμονομημένος γνώμονας, ψαλίδι, κόλλα, κολλητική ταινία, διαφάνεια με φωτοτυπημένο τετραγωνικό πλέγμα, μαρκαδόρος, μολύβι, σβήστρα και αριθμομηχανή. Επιπλέον, σχεδιάστηκε για κάθε ομάδα ένα φύλλο εργασίας, με στόχο να παρέχει μέσω ερωτήσεων κάποια βήματα για την επίλυση του προβλήματος και να βοηθάει τους μαθητές αργότερα στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων στην τάξη.

Μετά την επισημοποίηση των νέων ιδιοτήτων, ακολουθούσε η αξιοποίηση του κειμένου του Πολύβιου. Εδώ, υπήρξε η πρόβλεψη να γίνει σχετική συζήτηση, ενώ σχεδιάστηκαν και δύο δραστηριότητες. Η πρώτη ζητούσε να βρεθεί τι σχήμα και διαστάσεις θα μπορούσαν να έχουν δύο πόλεις, που η μία να έχει περίμετρο 40 σταδίων, αλλά εμβαδόν διπλάσιο από την άλλη με περίμετρο 100 σταδίων. Η δεύτερη ήταν η δραστηριότητα «Γειτονιές της Θεσσαλονίκης». Για αυτήν, επιλέχτηκαν οκτώ ισοπεριμετρικά σχήματα, που συμβόλιζαν γειτονιές.

Εικόνα 1: Τα οκτώ ισοπεριμετρικά σχήματα της δραστηριότητας «Γειτονιές της Θεσσαλονίκης»

Ειδικότερα, υπήρξε η πρόβλεψη να είναι τα σχήματα αποτυπωμένα σε χαρτί, να αναγράφεται το μήκος κάθε πλευράς σε μέτρα και να δοθούν δύο σχήματα σε κάθε δυάδα μαθητών (εταιρική εργασία). Από τους μαθητές ζητούνταν να υπολογίσουν τις περιμέτρους και να συμπεράνουν, χωρίς υπολογισμό, αν η μια περιοχή είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από την άλλη και γιατί.

Στο πρώτο ερώτημα, οι μαθητές θα έπρεπε απλώς να προσθέσουν τα μήκη και να διαπιστώσουν ότι τα σχήματα ήταν ισοπεριμετρικά. Στο δεύτερο ερώτημα, χρειαζόταν να εργαστούν θεωρητικά (GII), εφαρμόζοντας τα επισημοποιημένα συμπεράσματα από το πρόβλημα με τις κηρήθρες. Ακολούθως, υπήρξε ο σχεδιασμός κάθε δυάδα μαθητών να ανακοινώσει την απάντηση και να ελέγξει την ορθότητά της με ηλεκτρονικές μετρήσεις (GI), μέσω σχετικής εφαρμογής και ψηφιακού προβολέα. Η εφαρμογή σχεδιάστηκε με το Geogebra και τα οκτώ σχήματα είχαν ως φόντο το χάρτη της Θεσσαλονίκης και κλίμακα ίδια με αυτόν. Τέλος, υπήρξε η πρόβλεψη να τοποθετήσουν οι μαθητές όλα τα σχήματα στον πίνακα, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, διαπιστώνοντας στην πράξη ότι οκτώ διαφορετικά σχήματα είχαν ίση περίμετρο, αλλά διαφορετικά εμβαδά, ότι το μεγαλύτερο ήταν το κανονικό σχήμα με τις περισσότερες γωνίες και ότι το μικρότερο ήταν το πιο μακρόστενο σχήμα.

5. Αποτελέσματα

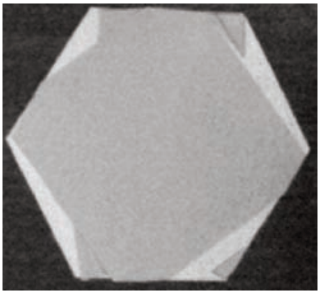
5.1. Η υλοποίηση του κατάλληλου ΓΧΕ και οι δυσκολίες των μαθητών

Από την επεξεργασία του κειμένου του Πάππου δύο αλληλένδετα στοιχεία είναι αξιοσημείωτα. Καταρχάς, όταν οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν στο κείμενο λέξεις και φράσεις σχετικές με τα Μαθηματικά, κανείς δεν ανέφερε τη λέξη «απόδειξη». Επιπλέον, μετά την επεξεργασία του κειμένου, αρκετοί έδειξαν πεπεισμένοι ότι ο Πάππος είχε δίκιο και συμφώνησαν a priori πως το εξάγωνο θα είναι μεγαλύτερο.

Στο πρόβλημα με τις κηρήθρες, όλες οι ομάδες κατέταξαν σωστά τα σχήματα βάσει εμβαδού. Παρακάτω, αναφέρονται οι κύριες δυσκολίες που παρατηρήθηκαν κατά τη διαδικασία επίλυσης.

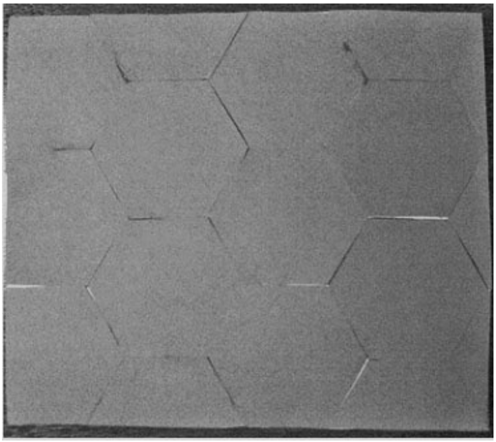
- Αποκοπή-επικόλληση: η σχετικά δυσκολότερη σύγκριση ήταν μεταξύ εξαγώνου-τετραγώνου Γενικά, όμως, αυτή η μέθοδος ήταν η ευκολότερη.

Εικόνα 2: Αποκοπή-επικόλληση. Σύγκριση εξαγώνου-τετραγώνου



- Πλακόστρωση: χρειάστηκε να επιστρατευθεί το υποθετικό παράδειγμα δύο ίδιων δωματίων με διαφορετικά πλακάκια, ώστε να γίνει κατανοητό το σκεπτικό της μεθόδου. Στην καταμέτρηση των σχημάτων, μεγαλύτερη δυσκολία παρατηρήθηκε στα εξάγωνα, καθώς απαιτούνταν η σύνθεση με το βλέμμα επιμέρους τμημάτων διαφορετικών από το μισό.

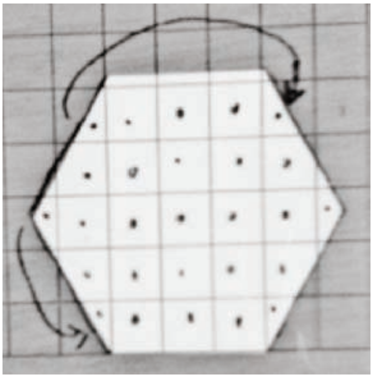
Εικόνα 3: Πλακόστρωση με κανονικό εξάγωνο



- Καταμέτρηση τετραγωνιδίων: οι μαθητές αρχικά δε θυμούνταν ότι σε μικρότερες τάξεις για να βρουν το εμβαδόν μετρούσαν τετραγωνάκια, που είτε υπήρχαν στο σχήμα είτε τα σχεδίαζαν οι ίδιοι. Επιπλέον, χρειάστηκε να βρουν ένα λειτουργικό τρόπο χρήσης του ημιδιαφανούς πλέγματος, που ήταν νέο για αυτούς εργαλείο.

Το δυσκολότερο σημείο ήταν η καταμέτρηση των επιμέρους τετραγωνιδίων του εξαγώνου.

Εικόνα 4: Καταμέτρηση τετραγωνιδίων κανονικού εξαγώνου



Μια πιο εξελιγμένη λύση δόθηκε αργότερα με την ανασύνθεση ολόκληρου του εξαγώνου σε ορθογώνια.

- Υπολογισμός: χρειαζόταν να ανασυντεθούν κάποια σχήματα, ώστε να προκύψουν σχήματα με διδαγμένο τύπο.

Εικόνα 5: Ανασύνθεση ισόπλευρου τριγώνου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (4η μέθοδος)

Δυσκολίες υπήρξαν στην επιλογή του κατάλληλου τύπου, στην ανασύνθεση του εξαγώνου και στον υπολογισμό που έπρεπε να γίνει όταν ένα σχήμα αναλυόταν μέσω δίπλωσης, χωρίς να κοπεί.

Πέραν τούτων, κάποιοι μαθητές από διαφορετικές ομάδες έδειξαν σύγχυση μεταξύ περιμέτρου-εμβαδού. Εμπόδιο για τις ομάδες ήταν και το σύνηθες διδακτικό συμβόλαιο, καθώς στις μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού οι πρακτικές δραστηριότητες με σχήματα υλικής φύσεως μάλλον απουσιάζουν στην πράξη. Έτσι, ορισμένοι ένιωθαν την ανάγκη να ζητούν άδεια για τη χρήση του ψαλιδιού, τη δίπλωση και την κοπή των σχημάτων, παρότι είχε επισημανθεί πως μπορούσαν να εργαστούν με τα σχήματα όπως ήθελαν, χρησιμοποιώντας όποιο εργαλείο από τα διαθέσιμα ήθελαν.

Όσον αφορά το κείμενο του Πολύβιου, στη συζήτηση που ακολούθησε διατυπώθηκαν τα συμπεράσματα «πως μπορεί κάποιο μέρος να έχει μεγαλύτερη περίμετρο, αλλά μικρότερο εμβαδόν ή μικρότερη περίμετρο, αλλά μεγαλύτερο εμβαδόν» (μαθήτρια Θ) και ότι «αν ένα μέρος είναι μεγαλύτερο, δεν έχει σχέση η περίμετρος, αλλά έχει σχέση το εμβαδόν» (μαθήτρια Ζ). Στη δραστηριότητα «Γειτονιές της Θεσσαλονίκης», ενδεικτική είναι η απάντηση των μαθητών που ανέλαβαν να συγκρίνουν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το τετράγωνο: «Μεγαλύτερο είναι το τετράγωνο γιατί έχουν ίση περίμετρο και μεγαλύτερα είναι αυτά που είναι κανονικά». Παρομοίως, στη σύγκριση κανονικού πενταγώνου-ισόπλευρου τριγώνου δόθηκε η απάντηση: «Είναι κανονικά και ισοπεριμετρικά μεταξύ τους. Παρόλο που έχουν την ίδια περίμετρο, επειδή το πεντάγωνο έχει περισσότερες γωνίες από το τρίγωνο, υποθέσαμε ότι το πεντάγωνο είναι μεγαλύτερο.» Από την άλλη, υπήρξε μαθητής που υπολόγισε λάθος τις περιμέτρους, ενώ ένας μαθητής είχε αρχικά τη διάθεση να εργαστεί στη GI, αναλύοντας τα σχήματα και υπολογίζοντας με τύπους, κάτι που ήταν δύσκολο, αφού τα σχήματα ήταν υπό σμίκρυνση.

5.2. Αυτοαναφορές των μαθητών για τη μάθησή τους

Στο τελευταίο φύλλο εργασίας υπήρχαν αρκετές ερωτήσεις αναστοχασμού. Σε αυτές δεν απάντησαν όλοι, ενώ κάποιοι απάντησαν γενικόλογα. Οι υπόλοιποι αναφέρθηκαν:

- Στις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού. Ενδεικτικά, η μαθήτρια Υ ανέφερε ως ιδέα που άλλαξε ότι «πάντα όποια σχήματα έχουν ίδια περίμετρο έχουν και ίδιο εμβαδό», ενώ ως νέα της ιδέα ότι «το εμβαδό με την περίμετρο δεν έχουν σχέση». Επίσης, ο μαθητής Δ έγραψε πως κάτι που τον εξέπληξε είναι «ότι μικρά και μεγάλα σχήματα έχουν την ίδια περίμετρο».
- Σε ιδέες ή διαδικασίες που συνδέονται με τον πειραματισμό. Ενδεικτικά, η μαθήτρια Ι έγραψε πως μια ιδέα που άλλαξε ήταν ότι «για να βρω τη περίμετρο πίστευα πως κάνω πλευρά · πλευρά», αλλά «Ανακάλυψα ότι κάνουμε πλευρά + πλευρά + πλευρά + πλευρά...». Επιπλέον, ο μαθητής Η έγραψε πως κάτι που

έμαθε είναι «ότι μπορώ να βρω πιο [*sic*] σχήμα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν χωρίς να το υπολογίσω», που δείχνει την κυριαρχία του υπολογισμού με τύπους στις μέχρι τότε εμπειρίες των μαθητών. Ομοίως, ο μαθητής Χ ανέφερε πως κάτι που τον εξέπληξε είναι «ότι υπάρχουν τόσες διαφορετικές μέθοδοι για να μετρήσεις ποιο σχήμα είναι μεγαλύτερο».

- Στις μέλισσες και στο σχήμα των κελιών, ως κάτι που τους εξέπληξε.
- Στη στάση τους για τη Γεωμετρία. Η μαθήτρια Ζ ανέφερε ότι πριν δεν αγαπούσε τη Γεωμετρία, ενώ με αυτά τα μαθήματα της άρεσε κάπως περισσότερο, γιατί τα κατάλαβε. Παρομοίως, η μαθήτρια Υ έγραψε πως κάτι που την εξέπληξε είναι ότι «πίστευα ότι η γεωμετρία ήταν δύσκολη, μπερδευτική και ακατανόητη αλλά διαπίστοσα [*sic*] μετά από αυτά τα μαθήματα ότι είναι πιο εύκολη».

Επιπλέον, οι μαθητές κλήθηκαν να γράψουν κάτι που τους δυσκόλεψε. Εδώ, δύο μαθητές ανέφεραν το πρόβλημα με τις κηρήθρες, ένας τη μέθοδο της πλακόστρωσης και άλλοι δύο τη μέθοδο καταμέτρησης τετραγωνιδίων, τέσσερις έγραψαν πως τους δυσκόλεψε να βρουν το εμβαδόν είτε του εξαγώνου είτε του τριγώνου, ενώ ένας αναφέρθηκε στο γεγονός ότι «Υπάρχουν σχήματα με ίση περίμετρο». Τέλος, αρκετοί έγραψαν πως δεν τους δυσκόλεψε κάτι ή δεν έγραψαν τίποτα.

5.3. Αξιολόγηση των πηγών και του προβλήματος από τους μαθητές

Στο ίδιο φύλλο εργασίας οι μαθητές ρωτήθηκαν, επίσης, πόσο τους άρεσε το καθένα από τα κείμενα που χρησιμοποιήθηκαν στα μαθήματα. Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να βαθμολογήσουν κάθε κείμενο με ένα βαθμό από το 1, που συμβολίζει το λιγότερο, μέχρι και το 5, που συμβολίζει το περισσότερο. Το ιστορικό σημείωμα βαθμολογήθηκε κατά μέσο όρο με 3,45 βαθμούς (SD=0,91, N=22), ενώ το κείμενο του Πάππου με 4,36 βαθμούς (SD=0,66, N=22). Τέλος, το κείμενο του Πολύβιου, κατά τη διδασκαλία του οποίου απουσίαζαν δύο μαθητές, βαθμολογήθηκε κατά μέσο όρο με 3,85 βαθμούς (SD=1,31, N=20).

Για να διαπιστωθεί αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ως προς το πόσο άρεσαν οι 20 κοινοί μαθητές τα τρία κείμενα, χρησιμοποιήθηκε το Friedman test, που έδειξε ότι η διαφορά ήταν σημαντική (χ^2=6,818, df=2, p=0,033<0,05). Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας για τις απαντήσεις αυτών των 20 μαθητών το Wilcoxon Signed Ranks Test με διόρθωση Bonferroni, βρέθηκε ότι η διαφορά ήταν στατιστικά σημαντική στη σύγκριση του κειμένου του Πάππου με το ιστορικό σημείωμα (Z=-2,857, p=0,004<0,017), αλλά όχι στη σύγκριση του κειμένου του Πάππου με αυτό του Πολύβιου (Z=-1,543, p=0,123) ούτε στη σύγκριση του κειμένου του Πολύβιου με το ιστορικό σημείωμα (Z=-0,997, p=0,319).

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη τις απαντήσεις συνολικά των 22 μαθητών που διδάχτηκαν το κείμενο και του Πάππου και του βιβλίου, η διαφορά ήταν πάλι στατιστικά σημαντική (Z=-3,137, p=0,002). Μάλιστα, μόλις δύο από τους 22 μαθητές άρεσαν περισσότερο το ιστορικό σημείωμα, έναντι 15 μαθητών που άρεσαν περισσότερο το κείμενο του Πάππου, ενώ πέντε μαθητές άρεσαν εξίσου τα δύο κείμενα.

Στο ίδιο φύλλο εργασίας, οι μαθητές συνέκριναν, επίσης, τη δυσκολία και το ενδιαφέρον που τους προκάλεσε το πρόβλημα με τις κηρήθρες, σε σχέση με τα προβλήματα που συνήθως συναντούν στα Μαθηματικά. Εδώ, οι 11 από τους 22 μαθητές εκτίμησαν ότι το πρόβλημα με τις κηρήθρες ήταν πιο εύκολο, ενώ οκτώ απάντησαν ότι ήταν πιο δύσκολο και τρεις ότι είχε τον ίδιο βαθμό δυσκολίας. Ωστόσο, οι 21 από τους 22 μαθητές βρήκαν αυτό το πρόβλημα πιο ενδιαφέρον από τα συνήθη προβλήματα, ενώ ένας μαθητής απάντησε ότι ήταν το ίδιο ενδιαφέρον.

Συγκρίνοντας το δηλωμένο βαθμό δυσκολίας του προβλήματος με τη μέθοδο που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά την επίλυσή του, προκύπτει ότι από όσους εργάστηκαν με την αποκοπή-επικόλληση κανείς δεν έκρινε το πρόβλημα ως πιο δύσκολο. Αντίθετα, τα 3/4 όσων καταμέτρησαν τετραγωνίδια θεώρησαν το πρόβλημα πιο δύσκολο. Περαιτέρω, ανα-κωδικοποιώντας τις απαντήσεις (1=πιο δύσκολο, 0=ίδιος βαθμός δυσκολίας, -1=πιο εύκολο), φαίνεται σαφέστερα ότι οι μαθητές που εργάστηκαν με την αποκοπή-επικόλληση και την πλακόστρωση θεώρησαν κατά μέσο όρο το πρόβλημα ως πιο εύκολο (μέσος βαθμός δυσκολίας -0,5 και -0,3 αντίστοιχα) σε σχέση με τους μαθητές που εργάστηκαν με την καταμέτρηση τετραγωνιδίων και τον υπολογισμό με τύπους (0,5 και 0 αντίστοιχα). Είναι, επίσης, ενδιαφέρον ότι πέντε μαθητές που γενικά είχαν αδυναμίες στα Μαθηματικά, αξιολόγησαν το πρόβλημα ως πιο εύκολο.

Στις συνεντεύξεις μετά την παρέμβαση, ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν αυτές τις εκτιμήσεις τους. Ενδεικτικά, ο μαθητής Τ υποστήριξε:

Απ.: Τα προβλήματα που λύνουμε συνήθως στο βιβλίο είναι πιο δύσκολα.

Ερ.: Τι είναι αυτό που τα κάνει πιο δύσκολα;

Απ.: Εεε... όταν δεν καταλαβαίνω, αυτό μου φαίνεται δύσκολο.

Επίσης, ο μαθητής Α έκρινε το πρόβλημα ως πιο εύκολο, γιατί «δε χρειαζόταν πολλούς υπολογισμούς και τέτοια» και ο μαθητής Γ γιατί «ήμασταν περισσότερα παιδιά και συνεργαζόμασταν». Στον αντίποδα, ο μαθητής Π π.χ. έκρινε το πρόβλημα πιο δύσκολο, γιατί «ήταν πιο πολύπλοκο», ενώ ο μαθητής Ξ, που είχε εργαστεί με την πλακόστρωση, θεώρησε το πρόβλημα ως πιο δύσκολο, γιατί «σε προβλημάτιζε με τα σχήματα, αν χωράει, αν αφήνει κενό, αν πρέπει... αν έπρεπε να βάλεις κάτι άλλο».

Όσον αφορά το ενδιαφέρον για το πρόβλημα, 12 μαθητές αναφέρθηκαν με ρητό και σαφή τρόπο στη φύση, τις μέλισσες, τις κηρήθρες ή και τους αρχαίους Έλληνες και, γενικότερα, σε ό,τι αποτελεί το πλαίσιο του προβλήματος. Χαρακτηριστικές είναι οι απαντήσεις:

- «Μάθαμε και πολλά πράματα για τη Γεωμετρία... πολλούς τρόπους για να βρούμε το εμβαδόν και την περίμετρο ενός σχήματος, αλλά και μάθαμε για την πραγματικότητα, γιατί άραγε οι μέλισσες χρησιμοποιούν αυτό το σχήμα.» (μαθήτρια Ι)
- «Είχες περιέργεια να το... δεις, είναι με τη φύση και... μυστήριο είναι αυτό που κάνουν οι μέλισσες, ενώ τα προβλήματα του βιβλίου ας πούμε είναι πιο απλά.» (μαθήτρια Θ)
- «Μ' άρεσε με το παράδειγμα που το κάναμε, δηλαδή με τις μέλισσες και τις κηρήθρες και το κείμενο που έλεγε... Αυτό ήταν σαν μια ιστορία που έπρεπε να λύσεις.» (μαθήτρια Μ)

Από την άλλη, ο μαθητής Β συνέδεσε ρητά τη δυσκολία με το ενδιαφέρον: «Ήτανε πιο δύσκολο, είχε ενδιαφέρον να το λύσεις». Υπήρχε, επίσης, μία αναφορά στο γεγονός ότι με αυτό το πρόβλημα έχουν ασχοληθεί οι μαθηματικοί και μία αναφορά στο ότι έτσι μάθαιναν «πώς η Γεωμετρία ανακαλύφτηκε» (μαθητής Ξ), τρεις αναφορές στο γεγονός ότι η εργασία έγινε κατά ομάδες και δύο αναφορές ότι το πρόβλημα ήταν ασυνήθιστο χαρακτηριστική είναι εδώ η απάντηση: «τέτοιο πρόβλημα εγώ δεν είχα ξανακάνει και γι' αυτό με άρεσε» (μαθητής Χ).

6. Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα, η Ιστορία των Μαθηματικών αξιοποιήθηκε με ποικίλους στόχους, που σχετίζονται μεταξύ τους, όπως σχετίζονται και με την ανάπτυξη των ΓΧΕ των μαθητών. Ειδικότερα, οι ιστορικές πηγές αποτέλεσαν την πηγή μαθηματικών προβλημάτων και τα προβλήματα αποτελούν το λόγο ύπαρξης των ΓΧΕ (Kuzniak, 2012). Επιπλέον, οι πηγές και το ιστορικό σημείωμα αποτέλεσαν μέσο κινητοποίησης και η κινητοποίηση αποτελεί σημαντικό μέσο για την ενεργοποίηση των μαθητών στην προσπάθεια επίλυσης των προβλημάτων (Brousseau, 2002). Θα μπορούσε εδώ να υποστηριχθεί ότι και τα τρία κείμενα συνέβαλαν στην κινητοποίηση των μαθητών, αφού αξιολογήθηκαν θετικά. Έτσι, δε βρήκε εδώ εφαρμογή το επιχείρημα ότι πολλοί μαθητές μπορεί να επηρεαστούν αρνητικά, γιατί δεν αγαπούν την Ιστορία (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000).

Ειδικά το κείμενο του Πάππου αξιοποιήθηκε και ως μέσο ενεργοποίησης προϋπαρχουσών ιδιοτήτων (π.χ. τι είναι η περίμετρος) και εμπλουτισμού με νέες ιδιότητες (π.χ. τι είναι τα κανονικά σχήματα), οι οποίες ήταν απαραίτητες για την ανάπτυξη των προσωπικών ΓΧΕ και την επίλυση του προβλήματος με τις κηρήθρες. Εδώ, επίσης, οι μαθητές είχαν μια πρώτη γνωριμία με μια νέα ιδιότητα-πρόταση για τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού. Αυτή η πρόταση, όμως, εκλήφθηκε από ορισμένους όχι ως κάτι προς επικείμενη διερεύνηση, αλλά ως βέβαιη γνώση, γεγονός που μπορεί να αποδοθεί στο σύνηθες διδακτικό συμβόλαιο, βάσει του οποίου οποιοδήποτε σχολικό κείμενο περιέχει αληθείς και μόνο γνώσεις, που δεν μπορούν να αμφισβητηθούν.

Είναι πιθανό, επίσης, να αντανακλά και μια ευρύτερη αντίληψη, βάσει της οποίας οποιαδήποτε μαθηματική γνώση είναι γενικά και διαχρονικά αληθής και, επομένως, ένας μαθηματικός δεν μπορεί να κάνει λάθος.

Όπως αναφέρθηκε, οι ιστορικές πηγές αποτέλεσαν την πηγή μαθηματικών προβλημάτων. Ακολούθως, το πρόβλημα με τις κηρήθρες αποτέλεσε μέσο για τον εμπλουτισμό των προσωπικών ΓΧΕ με νέα εργαλεία (ημιδιαφανές πλέγμα), αλλά και με μεθόδους πειραματισμού που προβάλλουν το εμβαδόν ως ιδιότητα και που ενώ ήταν διδαγμένες από μικρότερες τάξεις, είχαν λησμονηθεί.

Επιπλέον, τα προβλήματα αποτελούν, κατά τον Brousseau (2002), μέσο υπέρβασης των εσφαλμένων αντιλήψεων των μαθητών και το κείμενο του Πολύβιου φαίνεται να ενίσχυσε περισσότερο αυτήν την προσπάθεια υπέρβασης. Το κείμενο αυτό δεν αποτελεί κλασικό κείμενο αντιπαράθεσης γραμμένο για διδακτικούς σκοπούς, αλλά ιστορική πηγή, με τη συνθετότητά της. Ωστόσο, η αναφορά σε εσφαλμένες αντιλήψεις σχετικές με τις έννοιες περιμέτρου-εμβαδού και η γνώση ότι τα σφάλματα αυτά γίνονταν και από σημαντικά πρόσωπα της Ιστορίας έδωσε στους μαθητές το ερέθισμα και δημιούργησε και ένα κλίμα μεγαλύτερης άνεσης για να σκεφτούν και να εκφραστούν και για τον εαυτό τους. Αυτό σχετίζεται και πάλι με τους προσωπικούς ΓΧΕ, αφού οι αντιλήψεις αφορούν το θεωρητικό σύστημα αναφοράς του ΓΧΕ.

Εδώ, όμως, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι η αλλαγή των απόψεων είναι δύσκολη υπόθεση και κανένα κείμενο από μόνο του δεν επαρκεί για όλους (Tippett, 2010). Αυτό αφορά και τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού, στις οποίες δυσκολεύονται και μεγαλύτεροι μαθητές και ενήλικες (Kellogg, 2010, Woodward & Byrd, 1983) και για τις οποίες έχει παρατηρηθεί ότι οι εσφαλμένες αντιλήψεις συχνά επανέρχονται μετά τη διδασκαλία (Douady & Perrin-Glorian, 1989, Kellogg, 2010, Vighi, 2010).

Πέραν τούτων, είναι ενδιαφέρον ότι δύο μαθήτριες αναφέρθηκαν αυθόρμητα στη στάση τους για τη Γεωμετρία, αν και αυτός δεν ήταν ο πρώτιστος σκοπός της παρέμβασης.

Όσον αφορά την αξιολόγηση των ιστορικών κειμένων, οι μαθητές κατά μέσο όρο απάντησαν ότι τους άρεσαν και τα τρία κείμενα, περισσότερο του Πάππου, έπειτα του Πολύβιου και, τέλος, του βιβλίου. Η διαφορά ήταν στατιστικά σημαντική στη σύγκριση των κειμένων του Πάππου και του βιβλίου. Η ερμηνεία εδώ είναι πολλαπλή:

- Η σειρά των τριών κειμένων αντικατοπτρίζει το χρόνο που διατέθηκε στο καθένα. Αλλά αν ο τρόπος που αξιοποιήθηκε αυτός ο χρόνος δεν ήταν αρεστός στους μαθητές, τότε περισσότερος χρόνος θα σήμαινε, ίσως, μεγαλύτερη απαρέσκεια.
- Η μεγαλύτερη προτίμηση των μαθητών για τις δύο πηγές αφενός συμβαδίζει με την οδηγία των Schunk et al. (2010) να χρησιμοποιείται υλικό από πρωτότυπες πηγές και αφετέρου μπορεί να αποδοθεί στο ότι αυτές πλαισιώθηκαν με μαθηματικό πρόβλημα, σε αντίθεση με το ιστορικό σημείωμα.

- Ειδικά για το κείμενο του Πάππου ακολουθήθηκε η πρακτική της μεγαλόφωνης ανάγνωσης από τον εκπαιδευτικό, που πιθανότατα διευκόλυνε την κατανόηση και προσέδωσε στο κείμενο ζωντάνια και παραστατικότητα, αυξάνοντας έτσι το ενδιαφέρον (Ariail & Albright, 2006, Ivey & Broaddus, 2001, Schraw et al., 1995).
- Κυρίως φαίνεται ότι επηρέασαν τα χαρακτηριστικά του κειμένου του Πάππου και το θέμα του: η κοινωνία των μελισσών και η κανονικότητα στη φύση είναι ζητήματα που από την αρχαιότητα είχαν προσελκύσει το ενδιαφέρον φιλοσόφων και μαθηματικών και ήταν και ευρύτερα γνωστά (Cuomo, 2000). Μπορεί, λοιπόν, να υποστηριχτεί ότι εντάσσονται και αυτά τα ζητήματα σε εκείνα τα θέματα που σχετίζονται με τη φύση και που υποστηρίζεται ότι συχνά προκαλούν το ενδιαφέρον (Bergin, 1999). Άλλωστε, όπως αναφέρθηκε: «είναι με τη φύση και... μυστήριο είναι αυτό που κάνουν οι μέλισσες» (μαθήτρια Θ). Γενικότερα, πρόκειται για μια λογοτεχνική εισαγωγή σε βιβλίο, γραμμένη εξαρχής με στόχο να προκαλέσει το ενδιαφέρον. Εξάλλου, το απόσπασμα που επιλέχτηκε δεν περιέχει ονόματα και χρονολογίες ούτε αριθμούς, σε αντίθεση με τα άλλα δύο κείμενα.

Αναφορικά με το βαθμό δυσκολίας του προβλήματος με τις κηρήθρες σε σχέση με τα συνήθη προβλήματα, οι κρίσεις των μαθητών ήταν μοιρασμένες: ελαφρώς περισσότεροι ήταν όσοι έκριναν το πρόβλημα πιο εύκολο. Στις διαφορετικές κρίσεις επηρέασε, καταρχάς, η μέθοδος με την οποία εργάστηκε ο κάθε μαθητής. Επιπλέον, φαίνεται ότι οι μαθητές που γενικά υστερούσαν στα Μαθηματικά έκριναν το πρόβλημα ως πιο εύκολο λαμβάνοντας υπόψη την ομαδική εργασία, την απουσία υπολογισμών και την ύπαρξη σχημάτων κομμένων σε χαρτόνι και αντίστοιχων υλικών. Έτσι, είχαν και αυτοί κάτι να συνεισφέρουν. Ενδεικτικό είναι, άλλωστε, ότι στην ομάδα που εργάστηκε με τύπους η πιο δύσκολη ανασύνθεση του εξαγώνου έγινε από μαθητή που γενικά υστερούσε στα Μαθηματικά. Επίσης, η δόμηση του προβλήματος μέσω των ερωτήσεων του συνοδευτικού φύλλου εργασίας είναι πιθανό να συνετέλεσε ώστε να το αξιολογήσουν ως πιο εύκολο όσοι ακριβώς δυσκολεύονται να οργανώσουν την επίλυση προβλημάτων.

Από την άλλη, οι 21 από τους 22 μαθητές έκριναν το πρόβλημα ως πιο ενδιαφέρον σε σχέση με τα συνήθη προβλήματα. Αν αυτό συνδυαστεί με τις απαντήσεις για το βαθμό δυσκολίας, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένδειξη ικανοποιητικής ισορροπίας ανάμεσα στις απαιτήσεις του προβλήματος και στο επίπεδο του κάθε μαθητή. Σε αυτήν την ισορροπία συνέβαλε, όπως αναφέρθηκε, και ο πρακτικός χαρακτήρας της δραστηριότητας. Τα επιχειρήματα, εξάλλου, των μαθητών δείχνουν ότι πηγές ενδιαφέροντος ήταν η ομαδική εργασία, ο ασυνήθιστος χαρακτήρας του προβλήματος και, πρωτίστως, το πλαίσιο του προβλήματος. Πρόκειται για παράγοντες που αναφέρονται και στη βιβλιογραφία (Bergin, 1999, Mitchell, 1993, Schunk et al., 2010) και που μπορεί να επηρέασαν άμεσα και έμμεσα. Η ομαδική εργασία π.χ. φαίνεται από τις απαντήσεις των μαθητών ότι επηρέασε και έμμεσα, διευκολύνοντας την εργασία και παρεμβαίνοντας έτσι στη σχέση βαθμός πρόκλησης - επίπεδο μαθητών. Όσον αφορά το πλαίσιο του προβλήματος, αυτό είχε καθοριστεί από το κείμενο του Πάππου και φαίνεται ότι ο συνδυασμός κειμένου και προβλήματος συνέδεσε τη γνώση με τα ερωτήματα που τη γέννησαν και έδωσε νόημα στη δραστηριότητα.

Σημείωση

1. Το 9ο βιβλίο των *Ιστοριών* σώζεται σε αποσπάσματα και η σειρά τους δεν είναι απολύτως βέβαιη. Σε άλλες εκδόσεις ή μεταφράσεις, το απόσπασμα αυτό εντάσσεται στο 9.21. Στην έκδοση του Büttner-Wobst εντάσσεται στο 9.26a και αυτό αποδέχτηκε και ο Walbank (1967).

Αναφορές

Ariail, M. & L.K. Albright (2006) A survey of teachers' read-aloud practices in middle schools. *Reading Research and Instruction,* 45: 69-89.

Bergin, D.A. (1999) Influences on classroom interest. *Educational Psychologist,* 34: 87-98.

Brousseau, G. (2002) *Theory of didactical situations in Mathematics* (eds. & trans. N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield). New York: Kluwer Academic.

Cooke, R. (2005) *The history of mathematics: A brief course*. Hoboken, NJ: Wiley (2nd ed.).

Cuomo, S. (2000) *Pappus of Alexandria and the mathematics of late antiquity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Douady, R. & M.J. Perrin-Glorian (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics,* 20: 387-424.

Duval, R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10: 5-53.

Furinghetti, F. & L. Radford (2008) Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New York: Routledge (2nd ed.), 626-655.

Georgia Department of Education (2014, July) *Common Core Georgia Performance Standards Framework. Third Grade mathematics. Unit 4: Geometry*. Available: https://www.georgiastandards.org/CommonCore/Common%20Core%20Frameworks/CCGPS_Math_3_Unit4Framework.pdf [9-11-2014]

Hales, T.C. (2001) The honeycomb conjecture. *Discrete & Computational Geometry,* 25: 1-22.

Heath, T. (1921) *A history of Greek mathematics*. Oxford: Clarendon Press (Vol. 2).

Jahnke, H.N., A. Arcavi, E. Barbin, O. Bekken, F. Furinghetti, A. El Idrissi... C. Weeks (2000) The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.) *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic, 291-328.

Jankvist, U.T. (2009) *Using history as a 'goal' in mathematics education* (Doctoral dissertation). Roskilde University. Available: http://rudar.ruc.dk//bitstream/1800/4950/1/IMFUFA_464.pdf [11-1-2013]

Ivey, G. & K. Broaddus (2001) Just plain reading: A survey of what makes students want to read in middle school classrooms. *Reading Research Quarterly,* 36: 350-377.

Καριώτογλου, Π. (2006) *Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου φυσικών επιστημών*. Θεσσαλονίκη: Γράφημα.

Κασσώτη, Ό., Π. Κλιάπης & Θ. Οικονόμου (2006) *Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Kellogg, M.S. (2010) *Preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge related to area and perimeter: A teacher development experiment investigating anchored instruction with web-based microworlds* (Doctoral dissertation). University of South Florida. Available: http://scholarcommons.usf.edu/etd/1679 [15-11-2012]

Kuzniak, A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 6: 167-187.

Kuzniak, A. (2012, July) *Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations*. Regular lecture given at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea. Available: http://www.icme12.org/upload/submission/1922_F.pdf [24-10-2013]

Mitchell, M. (1993) Situational interest: Its multifaceted structure in the secondary school mathematics classroom. *Journal of Educational Psychology,* 85: 424-436.

Moreira-Baltar, P. & C. Comiti (1994) Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles. *Petit x,* 34: 5-29.

North Carolina Department of Public Instruction (2012) *Third Grade area and perimeter.* Available: http://maccss.ncdpi.wikispaces.net/file/view/3rdGradeUnit.pdf [20-5-2013]

Nunes, T., P. Light & J. Mason (1993) Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instruction,* 3: 39-54.

Schraw, G., R. Bruning & C. Svoboda (1995) Sources of situational interest. *Journal of Literacy Research,* 27: 1-17.

Schunk, D.H., P.R. Pintrich & J.L. Meece (2010) *Τα κίνητρα στην εκπαίδευση* (μτφρ. Μ. Κουλεντιανού, επιμ. Ν. Μακρής & Δ. Πνευματικός). Αθήνα: Gutenberg.

Tippett, C.D. (2010) Refutation text in science education: A review of two decades of research. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 8: 951-970.

Tzanakis, C., A. Arcavi, C.C. de Sa, M. Isoda, C.K. Lit, M. Niss... M.K. Siu (2000) Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.) *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic, 201-240.

Vighi, P. (2010) Investigating comparison between surfaces. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.) *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique, 716-725.

Van de Walle, J.A. & L.A.H. Lovin (2006) *Teaching student-centered mathematics: Grades 3-5*. Boston: Pearson.

Vosniadou, S. & X. Vamvakoussi (2006) Examining mathematics learning from a conceptual change point of view: Implications for the design of learning environments. In L. Verschaffel, F. Dochy, M. Boekaerts & S. Vosniadou (Eds.) *Instructional psychology: Past, present and future trends. Sixteen essays in honour of Erik De Corte*. Oxford: Elsevier, 55-72.

Walbank, F.W. (1967) *A historical commentary on Polybius*. Oxford: Clarendon Press (Vol. 2).

Woodward, E. & F. Byrd (1983) Area: included topic, neglected concept. *School Science and Mathematics,* 83: 343-347.

Zacharos, K. (2006) Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior,* 25: 224-239.

Παράρτημα: *Μεταφράσεις Ιστορικών πηγών που χρησιμοποιήθηκαν στη διδασκαλία*

ΠΑΠΠΟΣ Ο ΑΛΕΞΑΝΔΡΙΝΟΣ: «Συναγωγή» ή «Μαθηματική Συλλογή»

Βιβλίο Ε΄: Πρόλογος για τη σοφία των μελισσών

Την καλύτερη και τελειότερη κατανόηση της σοφίας και των Μαθηματικών την έδωσε ο Θεός στους ανθρώπους, αλλά ένα μικρό μερίδιο από αυτά το παραχώρησε, επίσης, σε κάποια από τα μη λογικά ζώα. Στους ανθρώπους, λοιπόν, που είναι λογικά όντα, παραχώρησε την ικανότητα να κάνουν τα πάντα με βάση τη λογική και την απόδειξη. Στα υπόλοιπα ζώα, όμως, δώρισε την ικανότητα να αποκτά το καθένα - όχι με τη λογική, αλλά με κάποια φυσική προνοητικότητα - μόνο όσα είναι χρήσιμα και ωφέλιμα για τη ζωή.

Αυτό μπορεί κάποιος να το παρατηρήσει ότι ισχύει στα περισσότερα είδη ζώων, περισσότερο, όμως, στις μέλισσες. Διότι η τάξη και η υπακοή τους σε αυτές που κυβερνούν την κοινότητά τους είναι πραγματικά αξιοθαύμαστες. Αλλά ακόμη πιο αξιοθαύμαστη είναι η φιλοτιμία τους, η καθαριότητα στη συγκομιδή του μελιού, η προνοητικότητα και η φροντίδα τους για τη διατήρησή του. Πιθανώς επειδή οι θεοί έχουν εμπιστευθεί σε αυτές το έργο της μεταφοράς στους πιο καλλιεργημένους ανθρώπους κάποιου μεριδίου από την αμβροσία, δε θεώρησαν σωστό να το σκορπούν αυτό άσκοπα στο έδαφος ή σε ξύλο ή σε ένα άλλο άμορφο και ακανόνιστο υλικό. Αλλά, συλλέγοντας τα ομορφότερα από τα πιο γλυκά άνθη που φυτρώνουν στη γη, κατασκευάζουν από αυτά, για την τοποθέτηση του μελιού, αγγεία, τα οποία ονομάζονται κηρήθρες, όλα ίσα μεταξύ τους, όμοια, δίπλα το ένα στο άλλο και εξαγωνικά ως προς το σχήμα.

Και το ότι τα έχουν σχεδιάσει αυτά μέσω κάποιας γεωμετρικής προνοητικότητας μπορούμε να το καταλάβουμε με αυτόν τον τρόπο: θεωρούσαν αναγκαίο τα σχήματα να είναι τέτοια, που να βρίσκονται εντελώς δίπλα το ένα στο άλλο και να έχουν τις πλευρές τους κοινές, ώστε καμία ξένη ουσία να μην εισέλθει στα κενά ανάμεσά τους και μολύνει το έργο τους. Τρία ευθύγραμμα σχήματα θα μπορούσαν να ικανοποιήσουν αυτήν την προϋπόθεση. Και εννοώ κανονικά σχήματα, ισόπλευρα και ισογώνια, διότι τα ανόμοια σχήματα δε θα ικανοποιούσαν τις μέλισσες. Λοιπόν, τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα εξάγωνα μπορούν, όταν είναι δίπλα το ένα στο άλλο, να έχουν τις πλευρές τους κοινές. Εφόσον υπάρχουν λοιπόν τρία σχήματα που είναι από μόνα τους ικανά να γεμίσουν τελείως το χώρο γύρω από το ίδιο σημείο - το τρίγωνο, το τετράγωνο και το εξάγωνο - οι μέλισσες, με τη σοφία τους, επέλεξαν για αυτό που προετοιμάζουν το σχήμα που έχει τις περισσότερες γωνίες, διότι αντιλήφθηκαν ότι αυτό χωράει περισσότερο μέλι από το καθένα από τα υπόλοιπα.

Οι μέλισσες, λοιπόν, γνωρίζουν μόνο αυτό που είναι χρήσιμο σε αυτές. Δηλαδή, ότι το εξάγωνο είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο και το τρίγωνο και μπορεί να χωρέσει περισσότερο μέλι, με την ίδια δαπάνη υλικών για την κατασκευή καθενός. Εμείς, ωστόσο, ισχυριζόμενοι ότι κατέχουμε μεγαλύτερο μερίδιο σοφίας από τις μέλισσες, θα ερευνήσουμε κάτι ευρύτερο. Δηλαδή, ότι από όλα τα ισόπλευρα και ισογώνια επίπεδα σχήματα που έχουν ίση περίμετρο, μεγαλύτερο είναι πάντοτε αυτό που έχει το μεγαλύτερο αριθμό γωνιών.

ΠΟΛΥΒΙΟΥ ΙΣΤΟΡΙΕΣ

Οι περισσότεροι άνθρωποι υπολογίζουν τα μεγέθη των προαναφερομένων [δηλαδή, των πόλεων και των στρατοπέδων] μόνο από την περίμετρο. Έτσι, όταν κάποιος πει ότι η πόλη της Μεγαλόπολης έχει περιφέρεια 50 σταδίων*, ενώ η Σπάρτη 48, αλλά η Σπάρτη έχει διπλάσιο μέγεθος από τη Μεγαλόπολη, ο ισχυρισμός φαίνεται σε αυτούς απίστευτος. Και αν κάποιος, θέλοντας να αυξήσει την απορία, έλεγε ότι είναι δυνατόν μια πόλη ή ένα στρατόπεδο, ενώ έχει περιφέρεια 40 σταδίων, να είναι διπλάσια από μία που έχει περίμετρο 100, τότε αυτός ο ισχυρισμός θα τους άφηνε εντελώς έκπληκτους. Ο λόγος για αυτό είναι ότι δε θυμούμαστε τα μαθήματα Γεωμετρίας που είχαμε διδαχτεί στα παιδικά μας χρόνια. Οδηγήθηκα να μιλήσω για αυτά, γιατί δεν είναι μόνο απλοί άνθρωποι, αλλά και κάποιοι από τους πολιτικούς και τους διοικητές του στρατού που έχουν μπερδευτεί μερικές φορές, απορώντας αν είναι δυνατό η Σπάρτη να είναι μεγαλύτερη από τη Μεγαλόπολη και μάλιστα κατά πολύ, ενώ έχει μικρότερη περιφέρεια· και άλλες φορές προσπαθώντας να υπολογίσουν τον αριθμό των ανδρών, εξετάζοντας μόνο το μήκος της περιφέρειας ενός στρατοπέδου.

***Στάδιο:** Αρχαία μονάδα μέτρησης μήκους.
1 στάδιο ισούται με περίπου 185 μ.

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ[1]

Ευάγγελος Ν. Παναγιώτου
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Περιφερειακή Διεύθυνση Εκπαίδευσης Στερεάς Ελλάδας

Abstract

For more than three centuries, students encountered logarithms initially as a computational tool. Today, electronic calculation has obviated the need to teach computation with logarithms, and the first encounter with logarithms is often a rather abstract treatment of natural logarithms. This introduction seems out of the blue, with little connection to what the students have learned before. Here, we examine the historical development of logarithms, the remarkable individuals involved and their surprising discoveries, and we will suggest a possible implementation of this development to teaching. The proposed teaching sequence has been successfully undertaken twice with 16-17 year-old high school students (11th grade). With this approach logarithms seem less mysterious, more human, more understandable, and today's students find more "natural" the so-called natural logarithms.

Key words

Arithmetic and geometric progressions, history of mathematics, hyperbola, logarithm.

Περίληψη

Για περισσότερο από τρεις αώνες, οι μαθητές γνώρισαν τους λογαρίθμους ως ένα υπολογιστικό εργαλείο. Σήμερα, τα ηλεκτρονικά μέσα έχουν εξαλείψει την ανάγκη των υπολογισμών με λογαρίθμους και έτσι η πρώτη συνάντηση των μαθητών με την έννοια αυτή γίνεται με μια μάλλον αφηρημένη παρουσίαση των φυσικών λογαρίθμων. Η εισαγωγή αυτή φαίνεται ουρονοκατέβατη γιατί έχει ελάχιστη σχέση με ό,τι έχουν ήδη μάθει οι μαθητές. Φαίνεται λογικό να διδάξουμε τους λογαρίθμους διατρέχοντας τα βασικά σημεία της ιστορικής τους ανάπτυξης. Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε την ιστορία των λογαρίθμων, τα αξιόλογα πρόσωπα που εμπλέκονται, καθώς και τις εντυπωσιακές τους ανακαλύψεις, και θα παρουσιάσουμε ένα πρόγραμμα αξιοποίησης αυτής της ιστορίας στη διδασκαλία. Αυτή η διδακτική ακολουθία έχει εφαρμοστεί δύο φορές στη Β'τάξη Λυκείου με αποτέλεσμα οι λογάριθμοι να φαίνονται

λιγότερο μυστηριώδεις, πιο ανθρώπινοι, πιο κατανοητοί και οι μαθητές να αντιλαμβάνονται πράγματι ως «φυσικούς» τους φυσικούς λογαρίθμους.

Λέξεις κλειδιά

Αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος, ιστορία των μαθηματικών, υπερβολή, λογάριθμος.

0. Εισαγωγή

Η αρχική αιτία για την διδασκαλία των λογαρίθμων ήταν η χρησιμότητά τους στην γρήγορη και εύκολη εκτέλεση πολύπλοκων αριθμητικών υπολογισμών. Η αιτία αυτή δεν υπάρχει σήμερα, αφού οι μικροϋπολογιστές τσέπης και οι υπολογιστές έχουν απλοποιήσει το πρόβλημα των πράξεων με μεγάλους αριθμούς. Η πραγματικότητα επέβαλε μια αναθεώρηση των στόχων και του περιεχομένου της διδασκαλίας της ενότητας των λογαρίθμων.

Τα διδακτικά βιβλία αρχίζουν την εισαγωγή των λογαρίθμων με τον ορισμό που δόθηκε από τον Euler (1707-1783) το 1770, στο διάσημο βιβλίο του *Complete Introduction to Algebra*: *Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού ως προς δεδομένη βάση, που υποτίθεται θετική, είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψωθεί η βάση για να προκύψει ο αριθμός* (Euler, 1984: 63–64). Έτσι, αν $x > 0$, ο λογάριθμος του x με βάση α, $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, συμβολίζεται με $\log_\alpha x$, και είναι εκείνος ο πραγματικός αριθμός y για τον οποίο είναι $\alpha^y = x$. Στη συνέχεια όμως δίνεται μεγαλύτερο βάρος στη συναρτησιακή μορφή της έννοιας του λογάριθμου: *Η εκθετική συνάρτηση $f : R \to R_+^*$ με $f(x) = \alpha^x$ ($\alpha > 0$) είναι 1 – 1, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}. Η f^{-1} λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση α και συμβολίζεται με $\log_\alpha x$.*

Έτσι, το υπολογιστικό μέρος της θεωρίας των λογαρίθμων πέρασε στο περιθώριο. Οι λογαριθμικοί πίνακες, που για αιώνες ήταν το εργαλείο για κάθε σοβαρό υπολογισμό, εντάχθηκαν στα αξιοπερίεργα και άχρηστα πια αντικείμενα. Στο προσκήνιο πέρασε η συναρτησιακή μορφή της έννοιας. Όμως ο μαθητής ή ο σπουδαστής δεν αντιλαμβάνεται για ποιο λόγο αναπτύσσεται η σχετική θεωρία μέσα σε μια παρουσίαση με πολλές διδακτικές αυθαιρεσίες, όπως είναι για παράδειγμα, το πως φθάσαμε στον ορισμό του λογαρίθμου, η εισαγωγή και σύνδεση του αριθμού e με τους λογαρίθμους και η αποδοχή βασικών αποτελεσμάτων χωρίς απόδειξη.

Αυτή η διαπίστωση υπονομεύει την πραγματική κατανόηση του προβλήματος. Ένας τρόπος για να κατανοήσουν οι μαθητές το πρόβλημα και να μην υποβαθμίσουν τις επιτυχίες του παρελθόντος είναι να ακολουθήσουμε την ιστορική εξέλιξη της έννοιας.

1. Η ιστορική διαδρομή μέχρι την δημιουργία των λογαρίθμων

Οι πρώτοι άνθρωποι κρατούσαν αριθμητικά στοιχεία κάνοντας χαρακιές πάνω σε ξύλα ή κόκαλα (π.χ. Struik, 1987). Κάθε χαρακιά αντιπροσώπευε μία μονάδα. Σχεδόν όλα τα συμβολικά συστήματα που ανέπτυξαν οι πρώτοι πολιτισμοί προέκυψαν από αυτό το απλοϊκό σύστημα απαρίθμησης στο οποίο πρόσθεσαν κάποια σύμβολα για να παριστάνουν μεγάλους αριθμούς διότι η επανάληψη ενός συμβόλου για την αναπαράσταση ενός μεγάλου αριθμού καταλαμβάνει πολύ χώρο και ο αριθμός δεν μπορεί να διαβαστεί εύκολα αφού πρέπει να απαριθμήσει κανείς όλες τις χαρακιές. Τα διάφορα συμβολικά συστήματα δεν είχαν όλα τον ίδιο βαθμό αποτελεσματικότητας. Μεταξύ των αρχαίων πολιτισμών οι μόνοι που ανέπτυξαν σύστημα όμοιο με το δικό μας δεκαδικό σύστημα ήταν οι Βαβυλώνιοι. Η εξέταση όλων των συστημάτων αποκαλύπτει ότι τα συστήματα αυτά ήταν ιδιαίτερα δύσχρηστα στην εκτέλεση όλων των βασικών αλγορίθμων, εκτός από αυτούς της πρόσθεσης και αφαίρεσης (π.χ., Resnikoff & Wells 1984, Van der Waerden 1961).

Η απλοποίηση που επέφερε το ινδο-αραβικό σύστημα στον λογισμό επαρκούσε στις συνήθεις καθημερινές περιστάσεις, όχι όμως και για τις ανάγκες των αστρονομικών υπολογισμών. Ανάγκες οι οποίες με την πάροδο του χρόνου αυξάνονταν καθώς οι απαιτήσεις από την αστρονομία για όλο και περισσότερο ακριβέστερες προβλέψεις έκαναν τους υπολογισμούς ακόμη πιο δύσκολους και χρονοβόρους. Έπρεπε να βρεθεί μέθοδος που θα συντόμευε και θα απλοποιούσε τις πιο πολύπλοκες πράξεις, τουλάχιστον αυτές του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με πολυψήφιους αριθμούς.

Στο τέλος του 16^{ου} αιώνα, η δυσκολία που συναντούσε όλος ο κόσμος στον πολλαπλασιασμό μεγάλων αριθμών οδήγησε αρχικά στην επινόηση μηχανικών τρόπων για την εκτέλεσή του. Οι πιο δημοφιλείς από τις μεθόδους που επινοήθηκαν για την εκτέλεση μεγάλων πολλαπλασιασμών είναι *η μέθοδος του δικτυωτού* και *η μέθοδος των ράβδων* του Napier (π.χ., Eves 1983, Παναγιώτου 2004). Με τους μηχανικούς αυτούς τρόπους υπολογισμού, η μόνη πράξη που είχε να κάνει τελικά ο υπολογιστής ήταν η πρόσθεση. Στην ιδέα αναγωγής του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση οφείλεται και *η τεχνική της προσθαφαίρεσης*, η οποία αξιοποιεί τους τύπους της τριγωνομετρίας που εκφράζουν το γινόμενο τριγωνομετρικών συναρτήσεων σαν αθροίσματα και διαφορές (*idem*).

Όμως, γενικά, οι δυνατότητες αυτών των μεθόδων ήταν περιορισμένες. Το μεγάλο βήμα για την επινόηση της έννοιας του λογάριθμου έγινε με τον συσχετισμό των όρων μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου.

1.1. Μετατρέποντας τον πολλαπλασιαμό σε πρόσθεση συγκρίνοντας αριθμητικές με γεωμετρικές προόδους

Η χρησιμότητα της σύγκρισης των ακολουθιών των όρων δύο προόδων, μιας αριθμητικής και άλλης γεωμετρικής, είχε επανειλημμένα τραβήξει την προσοχή των μαθηματικών (Smith 1915). Ας θεωρήσουμε τις επόμενες δύο προόδους:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ....

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 ....

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το γινόμενο δύο όρων της γεωμετρικής (π.χ. 32 x 128 = 4096) βρίσκεται ακριβώς κάτω από το άθροισμα των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής (5 + 7 = 12). Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ανάγεται ουσιαστικά σε πρόσθεση. Εύκολα διαπιστώνουμε επίσης ότι η διαίρεση ανάγεται σε αφαίρεση (4096 : 128 = 32 $\leftrightarrow$ 12 – 7 = 5), η ύψωση σε δύναμη σε απλό πολλαπλασιασμό με τον εκθέτη ($16^3 = 4096 \leftrightarrow 4 \times 3 = 12$) και ο υπολογισμός ρίζας σε απλή διαίρεση με τον δείκτη ($\sqrt[4]{4096} = 8 \leftrightarrow 12 : 4 = 3$).

Στην παραπάνω αντιστοιχία, οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, \ldots$

και οι όροι της αριθμητικής προόδου είναι ακριβώς οι εκθέτες των αντιστοίχων δυνάμεων του 2 που δίνουν τους όρους της γεωμετρικής προόδου. Επομένως οι προηγούμενες αναγωγές εκφράζονται με τις βασικές ιδιότητες των δυνάμεων. Τον 16ο αιώνα όμως δεν υπήρχε κάποιος κοινά αποδεκτός συμβολισμός για τις δυνάμεις και είναι πράγματι ένα από τα παράδοξα των μαθηματικών το γεγονός ότι οι λογάριθμοι ανακαλύφθηκαν πριν καθιερωθούν οι δυνάμεις. Σήμερα, είναι φανερό ότι οι όροι της αριθμητικής προόδου είναι οι λογάριθμοι των αντίστοιχων όρων της γεωμετρικής με βάση το 2 και γράφουμε: $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 64 = 6$, $\log_2 256 = 8$, ... Ο όρος «λογάριθμος» οφείλεται στον Napier και σημαίνει ακριβώς: ο αριθμός που μετράει τους λόγους. Πράγματι, στην παραπάνω αντιστοιχία ο αριθμός 6 που αντιστοιχεί στο 64 δείχνει «πόσοι λόγοι» χρειάζονται στη συνεχή αναλογία

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = \ldots$$

για να φτάσουμε στον όρο 64 (την εποχή του Napier, η γεωμετρική πρόοδος ορίζονταν σαν μια ακολουθία αριθμών που βρίσκονται σε *συνεχή αναλογία*).

Με την παραπάνω αντιστοίχιση έχει λυθεί το πρόβλημα των πράξεων μόνο για ορισμένους προνομιούχους αριθμούς, τους ακεραίους που είναι δυνάμεις του 2. Βεβαίως, θα μπορούσαμε να αυξήσουμε τις δυνατότητές μας αν αντικαθιστούσαμε τη γεωμετρική πρόοδο με τους ακεραίους που είναι δυνάμεις του 3, δυνάμεις του 4, κλπ. Σε κάθε περίπτωση, το γενικό σχήμα είναι:

0	1	2	3	4	5	6	7 …
1	λ	λ^2	λ^3	λ^4	λ^5	λ^6	λ^7 …

Σημειώστε ότι είναι ουσιαστικό το 1 της γεωμετρικής προόδου να αντιστοιχεί στο 0 της αριθμητικής.

Όμως, ακόμη και αν είχαμε μια άπειρη λίστα γεωμετρικών προόδων, θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ανήκουν στην ίδια γεωμετρική πρόοδο. Από την έως τώρα διαπραγμάτευση του θέματος προκύπτει ότι μια λύση του προβλήματος στα πλαίσια των προόδων θα είχε πρακτική αξία αν η γεωμετρική πρόοδος ήταν αρκετά «πυκνή», ώστε ανάμεσα στους όρους της να μπορούν να βρεθούν όλοι ή σχεδόν όλοι οι αριθμοί. Ο Σκωτσέζος J. Napier ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε και δημοσίευσε μια τέτοια πυκνή πρόοδο.

1.2. Οι λογάριθμοι του John Napier: Μια «πυκνή» πρόοδος

Ο John Napier (1550-1617) θέλησε να αντιμετωπίσει την δυσκολία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ημιτόνων. Ίσως γι' αυτό το λόγο περιόρισε αρχικά τους λογαρίθμους μόνο σε λογαρίθμους των ημιτόνων γωνιών. Για να αποφύγει δε τις δυσκολίες με τα κλάσματα θεώρησε ως ανεξάρτητη μεταβλητή την $x = 10^7$ ημφ, δεδομένου ότι ο καλύτερος πίνακας ημιτόνων που είχε στη διάθεσή του έδινε τους αριθμούς με επτά δεκαδικά ψηφία. Η γωνία φ κυμαίνεται από 0^o έως 90^o και δίνεται σε λεπτά αφού τα όργανα της εποχής δεν επέτρεπαν μεγαλύτερη ακρίβεια. Επειδή 10^7 ημ$90^o = 10^7$ και 10^7 ημ$1' = 2909$, συμπεραίνουμε ότι τα «ημίτονα» του Napier ήταν ακέραιοι μεταξύ του 2909 και 10.000.000.

Ο Napier άρχισε με τις προόδους του πίνακα 1. Η γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_0 = 10^7$ και λόγο $\lambda = 1 - 10^{-7} = 0,9999999$. Η επιλογή λόγου πολύ κοντά στο 1 ήταν μια έξυπνη ιδέα διότι έκανε την πρόοδο πολύ ''πυκνή'' και επί πλέον, η συγκεκριμένη επιλογή, επέτρεπε τον εύκολο υπολογισμό των όρων της προόδου. Πράγματι

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \lambda = \alpha_\nu (1 - 10^{-7}) = \alpha_\nu - \frac{\alpha_\nu}{10.000.000},$$

δηλαδή κάθε όρος προέκυπτε από τον προηγούμενό του αφαιρώντας το ένα δεκάκις εκατομμυριοστό του. Έτσι,

$\alpha_0 = 10^7 = 10\ 000\ 000.0000000$

$\alpha_1 = \alpha_0 - \alpha_0\, 10^{-7} = 10^7 - 1 = 9\ 999\ 999.000\ 000\ 0$

$\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_1\, 10^{-7} = 9\ 999\ 999 - 0.999\ 999\ 9 = 9\ 999\ 998.000\ 000\ 1$

Συνεχίζοντας έτσι βρήκε ότι ο εκατοστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι ο 9 999 900.000 495 0.

Πίνακας 1: Οι αρχικές πρόοδοι του Napier

Α.Π. β_ν=Nlogα	0	1	2	3	…	ν	..
Γ.Π. (α_ν)	10	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$ ‖ 9999999,0000000	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$ ‖ 9999998,0000001	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$ ‖ 9999997,0000003	…	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^\nu$	..

Αν ο Napier συνέχιζε με αυτόν τον τρόπο, θα χρειαζόταν να υπολογίσει 81.425.000 όρους, περίπου, για να φτάσει στον 2909. Στη συνέχεια έπρεπε να υπολογίσει τους λογαρίθμους όλων των «ημιτόνων» που υπήρχαν ανάμεσά τους. Αυτό σήμαινε ότι είχε να εκτελέσει ένα συντριπτικό όγκο υπολογισμών. Όμως η ευφυΐα του Napier τον οδήγησε να υπολογίσει τελικά μόνο 1600 βασικά σημεία αναφοράς αντί για 81.425.000!! (π.χ., Ayoub 1993, Edwards 1979, Panagiotou 2011). Στο επόμενο βήμα έπρεπε να υπολογίσει τους λογαρίθμους αυτών των αριθμών. Αυτό θα μπορούσε να γίνει σχετικά εύκολα με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής. Ωστόσο, ο Napier είχε επίγνωση (τουλάχιστον διαισθητικά) της μη γραμμικότητας της λογαριθμικής συνάρτησης και γι αυτό χρησιμοποίησε ένα άλλο έξυπνο τρόπο παρεμβολής. Για τους σκοπούς αυτής της μη γραμμικής παρεμβολής ο Napier χρειαζόταν ένα «συνεχή» ορισμό των λογαρίθμων και όχι ένα διακριτό ορισμό βασισμένο στις προόδους (τα *ίδια*). Μια υποθετική πορεία της σκέψης του Napier από το πλαίσιο των προόδων στον τελικό ορισμό με όρους συνεχούς κίνησης σημείων περιγράφεται από τον Lord Moulton (1915).

Ο Napier, το 1614, δημοσίευσε στο Εδιμβούργο το έργο του *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (=Περιγραφή του θαυμαστού κανόνα των λογαρίθμων) που περιείχε πίνακες και οδηγίες για την χρησιμοποίησή τους αλλά δεν έδινε τις αποδείξεις των ισχυρισμών (Napier 1614). Μετά το θάνατό του Napier, εκδόθηκε το 1619 το βιβλίο του με τίτλο *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (= Κατασκευή του θαυμαστού κανόνα των λογαρίθμων), στο οποίο δίνονται οι αποδείξεις των ισχυρισμών καθώς και τα ίδια τα βήματα για την κατασκευή των πινάκων (Napier 1619). Η διαπραγμάτευση του θέματος ακολουθώντας τον Napier όχι μόνο δεν θα έχει για τους μαθητές όφελος ανάλογο με τις δυσκολίες που θα συναντήσουν αλλά οι τεχνικές που χρησιμοποίησε μπορεί και να αποπροσανατολίσουν τους μαθητές και να ξεχάσουν το βασικό στόχο που είναι να θέσουμε σε αντιστοιχία τους όρους μιας αριθμητικής προόδου με τους όρους μιας ‘‘πυκνής’’ γεωμετρικής προόδου (Panagiotou 2011: 11-13). Αν και λίγα έχουν μείνει από την αρχική ιδέα (πίνακας) είναι προτιμότερο να μείνουμε σε αυτόν τον ορισμό.

Στο λογαριθμικό σύστημα του Napier (Πίνακας 1) δεν υπάρχει η έννοια της βάσης, στην οποία στηρίζεται ο σύγχρονος ορισμός. Απλά, οι όροι μιας γεωμετρικής προόδου έχουν αντιστοιχηθεί με τους όρους μιας αριθμητικής προόδου και οι όροι της αριθμητικής προόδου ονομάστηκαν λογάριθμοι των αντίστοιχων όρων της γεωμετρικής προόδου. Κατά τον Napier "*Logarithmi dici possunt numerorum proportionalium comites aequidifferentes*" (Λογάριθμοι είναι αριθμοί με σταθερή διαφορά που έχουν αντιστοιχηθεί με αριθμούς σε συνεχή αναλογία) (Cajori 1913: 7)

Αυτή η περιγραφή χαρακτηρίζει όλα τα λογαριθμικά συστήματα του 17ου αιώνα και ιδιαίτερα αυτά πριν το 1649 (Πίνακας 2) (Burn 2001).

Πίνακας 2: Μερικά από τα λογαριθμικά συστήματα του 17ου αιώνα

	Γεωμετρική πρόοδος	Αριθμητική πρόοδος
Napier, 1614	$10^7 (1 - 10^{-7})^\nu$	ν
Briggs, 1617	10^ν	ν
Speidell, 1619	$10^7 (1 - 10^{-7})^\nu$	$(10^8 - \nu) / 10^2$
Bürgi, 1620	$10^8 (1 + 10^{-4})^\nu$	$10\,\nu$
Kepler, 1624	$10^5 (1 - 10^{-5})^\nu$	ν
Cavalieri, 1632	10^ν	$10 + \nu$
Caramuel, 1670	10^ν	$10 - \nu$

Το σύστημα του Napier μπορεί να συγκριθεί με τα σημερινά αν αντικαταστήσουμε τις προόδους που χρησιμοποίησε με αυτές που προκύπτουν αν διαιρέσουμε όλους τους όρους και των δύο προόδων με 10^7 (πίνακας 3). Το νέο σύστημα έχει βάση α $= \left(1 - 10^{-7}\right)^{10^7} \cong 0{,}367879422$, η οποία αντιστοιχεί στο 1 της αριθμητικής προόδου, και το 1 της γεωμετρικής αντιστοιχεί στο 0 της αριθμητικής.

Πίνακας 3: Τροποποίηση των προόδων του Napier για την ανάδειξη της σχέσης τους με τους φυσικούς λογαρίθμους

Α.Π.	0	$10^{-7}\cdot 1$	$10^{-7}\cdot 2$	. . .	$10^{-7}\cdot \nu$	. . .
Γ.Π.	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0$ $\parallel$ 1	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1$ $\parallel$ 0,9999999	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	. . .	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^\nu$	. . .

Η βάση α συμπίπτει σε 8 ψηφία με την τιμή του $\frac{1}{e} \cong 0{,}367879441$. Επομένως, με σύγχρονο συμβολισμό, μπορούμε να γράψουμε κατά προσέγγιση ότι:

$$\log_{1/e}\left(1-10^{-7}\right)^{\nu} = 10^{-7}\nu \;\Leftrightarrow\; \log_{1/e}\frac{\alpha_\nu}{10^7} = \frac{\beta_\nu}{10^7} \qquad (1)$$

Στο σύστημα του Napier έχουμε (πίνακας 1) $\mathrm{Nlog}\,\alpha_\nu = \beta_\nu$, και η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\mathrm{N}\log\alpha_\nu = \beta_\nu = 10^7\log_{1/e}\frac{\alpha_\nu}{10^7} \Leftrightarrow \mathrm{N}\log\alpha_\nu = \beta_\nu = -10^7\ln\frac{\alpha_\nu}{10^7} \qquad (2)$$

Αν θέσουμε $x = \frac{\alpha_\nu}{10^7}$ και $y = \frac{\beta_\nu}{10^7}$, τότε η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\mathbf{y = -\ln x} \qquad (3)$$

Επομένως, αν οι όροι της γεωμετρικής και της αριθμητικής προόδου διαιρεθούν με 10^7, τότε οι λογάριθμοι του Napier είναι ουσιαστικά οι αντίθετοι των φυσικών λογαρίθμων.

Επανερχόμενοι στο σύστημα του Napier, παρατηρούμε ότι το βασικότερο μειονέκτημά του είναι ότι $\mathrm{Nlog}1 \neq 0$, αφού $\mathrm{Nlog}1 = 10^7 \ln 10^7$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην ισχύει η βασική λογαριθμική ιδιότητα $\mathrm{Nlog}(xy) = \mathrm{Nlog}x + \mathrm{Nlog}y$ αλλά το εξής:

$$\mathrm{Nlog}(xy) = \mathrm{Nlog}x + \mathrm{Nlog}y - \mathrm{Nlog}1.$$

Ο Napier απέδειξε αυτή τη βασική σχέση γεωμετρικά. Η ορθότητά της μπορεί να ελεγθεί με την βοήθεια της σχέσης (2). Ο Napier είχε αντιληφθεί το πρόβλημα και προς το τέλος της ζωής του, πρότεινε στον Άγγλο μαθηματικό Henry Briggs (1561 – 1631), καθηγητή στο κολέγιο Gresham του Λονδίνου, ότι η διαδικασία θα μπορούσε να απλοποιηθεί σημαντικά αν το 1 ήταν όρος της γεωμετρικής προόδου και αντιστοιχιζόταν στο 0 της αριθμητικής. Ο Briggs, σε συνεργασία με τον Napier, ανέλαβε να κατασκευάσει τους νέους πίνακες. Το αποτέλεσμα ήταν οι λογάριθμοι με βάση το 10, που σήμερα ονομάζουμε δεκαδικούς. Το 1624 ο Briggs δημοσίευσε το έργο του *Arithmetica Logarithmica* με τους νέους πίνακες λογαρίθμων των πρώτων 20 χιλιάδων φυσικών καθώς και των φυσικών από το 90000 μέχρι το 100000. Το κενό συμπληρώθηκε το 1628 από τον Ολλανδό βιβλιοπώλη και εκδότη Adriaen Vlacq (1600-1666). Οι τελευταίοι πίνακες ήταν η βασική μέθοδος απλοποίησης των υπολογισμών για τους επόμενους τρεις αιώνες.

1.3. Gregory of St-Vincent & A. A. de Sarasa: οι λογάριθμοι και η ορθογώνια υπερβολή

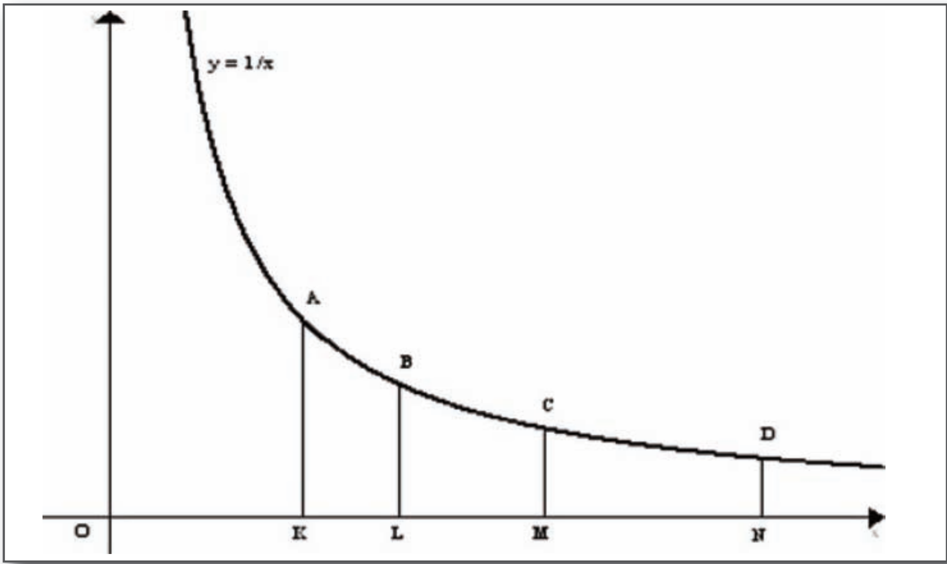
Οι λογαριθμικοί πίνακες διευκόλυναν αφάνταστα τους αριθμητικούς υπολογισμούς αλλά η σπουδαιότητα των λογαρίθμων στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού οφείλεται στη σύνδεση των λογαρίθμων με την ορθογώνια υπερβολή $xy = 1$. Ο Βέλγος Ιησουίτης Gregory of St-Vincent (1584-1667) έγραψε το σημαντικό έργο του *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni* (Antwerp 1647) με σκοπό την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου. Την εποχή αυτή σχεδόν κανείς πλέον δεν πίστευε στην δυνατότητα επίλυσης αυτού του προβλήματος και έτσι δεν ήταν λίγοι εκείνοι που ανέλαβαν το δύσκολο έργο του εντοπισμού κάποιου λάθους σε ένα βιβλίο που είχε 1200 σελίδες, ίσως το πιο πολυσέλιδο βιβλίο μαθηματικών που εκδόθηκε ποτέ. Τέσσερα χρόνια αργότερα, ο Christiaan Huygens (1651) βρήκε τελικά ένα σοβαρό λάθος στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου, στη σελίδα 1121. Το βιβλίο όμως περιείχε πολλά άλλα σημαντικά αποτελέσματα. Ένα από αυτά υπήρχε στην ενότητα που εξετάζει τις ιδιότητες των κωνικών τομών και αποδεικνύει την επόμενη πρόταση, η οποία δίνει, για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών, την λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής:

> *Έστω Ox και Oy οι ασύμπτωτες της υπερβολής ABD. Διαιρέστε την Ox, ώστε OK, OL, OM, ON να είναι σε συνεχή αναλογία. Τότε, τα μεικτόγραμμα σχήματα ABLK, BCML, CDNM έχουν ίσα εμβαδά.* (Σχ.1) [Πρόταση 130 στο Βιβλίο 6 του *Opus Geometricum* (Burn 2001: 2)].

Το ότι τα τμήματα είναι σε συνεχή αναλογία σημαίνει, όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, ότι αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Έτσι, μπορούμε να ξαναδιατυπώσουμε την πρόταση ως εξής:

> *Αν τα τμήματα OK, OL, OM, ON είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε τα εμβαδά (ABLK), (BCML), (CDNM) είναι ίσα.*

Σχήμα 1: Η λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής



Ο Gregory περιορίστηκε σε δύο διαδοχικές λωρίδες και απέδειξε ότι έχουν ίσα εμβαδά χρησιμοποιώντας μια διαδικασία ανάλογη με το σύγχρονο ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος (Burn 2001; Dhombres 1993).

Θα περίμενε κανείς ότι σ' αυτό το σημείο θα έκαναν την εμφάνισή τους οι λογάριθμοι. Όμως ο Gregory δεν αναφέρεται πουθενά στους λογαρίθμους, αν και ο Napier είχε χρησιμοποιήσει τον όρο αυτό από το 1614 και μάλιστα με την ίδια σημασία. Τη σχέση των υπερβολικών εμβαδών με τους λογαρίθμους επισημαίνει ο Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667) στο βιβλίο του *Solutio problematis a R.P. Marino Mersenno propositi* (Antwerp 1649), όπου επαναδιατυπώνει την βασική πρόταση ως εξής:

> *"Αν η Οχ διαιρεθεί έτσι ώστε τα τμήματα OK, OL, OM, ON να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, τότε τα εμβαδά (ABLK), (ACMK), (ADNK) αποτελούν αριθμητική πρόοδο, και αντιστρόφως".*

Έτσι δημιουργεί μια αντιστοιχία ανάμεσα στους όρους δύο προόδων της αριθμητικής (ABLK), (ACMK), (ADNK) και της γεωμετρικής OK, OL, OM, ON:

Πίνακας 4: Οι δύο φυσικές πρόοδοι του Gregory

0	(ABLK)	(ACMK)	(ADNK)
OK	OL	OM	ON

Υπάρχει δηλαδή η βασική αρχή ενός λογαριθμικού συστήματος, του οποίου όμως οι λογάριθμοι έχουν μια **φυσική** σημασία: εκφράζουν τα εμβαδά συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων.

Η διαπίστωση της σχέσης των λογαρίθμων με τα εμβαδά κάτω από την υπερβολή χρησιμοποιήθηκε τα επόμενα χρόνια πρακτικά αλλά και θεωρητικά: στην πράξη για την κατασκευή λογαριθμικών πινάκων και στη θεωρία οδήγησε στον ορισμό του λογαρίθμου κάθε θετικού αριθμού. Αρχικά δημιουργήθηκε το ερώτημα: κάθε εμβαδό κάτω από την υπερβολή είναι λογάριθμος; Ο Isaac Newton, σε ένα χειρόγραφό του το 1667, γράφει την εξίσωση της υπερβολής στη μορφή $y = 1/(1+x)$ και, κάνοντας τη διαίρεση, την αναπτύσσει σε άπειρη σειρά (Whiteside 1967–1976, vol. II: 184–189):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνει κατά όρους. Θα έπρεπε έτσι να πάρει τη λογαριθμική σειρά:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad , \quad |x| < 1$$

Ο Newton είναι προσεκτικός και δεν αναφέρεται σε λογαρίθμους και αντί για $\ln(1+x)$ γράφει $A(1+x)$ για το εμβαδό κάτω από την υπερβολή $y = 1/(1+x)$ και πάνω από το διάστημα $[0, x]$. Ισχυρίζεται όμως ότι τα εμβαδά κάτω από την υπερβολή έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τους λογαρίθμους και κατασκευάζει ένα μικρό πίνακα λογαρίθμων με 57 δεκαδικά ψηφία (Edwards 1979: 160).

Ο Nicolaus Mercator (1620-1687), στο έργο του *Logarithmotechnica* (London, 1668), καταλήγει στις ίδιες σειρές και, για διάκριση από τους δεκαδικούς λογαρίθμους, χρησιμοποιεί τον όρο «φυσικοί λογάριθμοι». Προσδιόρισε δε τον παράγοντα 0,43429 με τον οποίο πολλαπλασιαζόμενοι οι λογάριθμοι αυτοί μετατρέπονται σε δεκαδικούς. Το σύμβολο ln χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1893 από τον Irving Stringham (1847-1909) (Cajori 1928, v.2: 107)

Το τελικό αποτέλεσμα αυτών των εργασιών ήταν ότι για να περάσει κανείς από τους λογάριθμους του A.A de Sarasa στους σημερινούς φυσικούς λογάριθμους μπορούσε να χρησιμοποιήσει την υπερβολή $y = 1/x$ και το εμβαδόν κάτω από αυτή για να ορίσει τον λογάριθμο **συνεχώς**, δηλαδή να ορίσει τον λογάριθμο κάθε θετικού αριθμού. Ήταν αναγκαίο να πάρει $\log 1 = 0$. Αυτό θα καθόριζε την αρχή για την μέτρηση των εμβαδών και επί πλέον θα εξασφάλιζε την σχέση $\log(xy) = \log x + \log y$. Ο γνωστός τύπος ολοκλήρωσης

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \ln x$$

ο οποίος σε πολλά Πανεπιστημιακά συγγράμματα χρησιμοποιείται για τον ορισμό των φυσικών λογαρίθμων, ικανοποιεί τις προηγούμενες σκέψεις και υποδεικνύει σήμερα την καταγωγή των λογαρίθμων.

Ποια είναι η βάση αυτού του συστήματος; Θα έπρεπε να είναι κάποιος αριθμός x ώστε το εμβαδόν κάτω από την ορθογώνια υπερβολή $xy = 1$ από το 1 μέχρι τον αριθμό x να είναι ίσο με 1. Ο αριθμός αυτός x είναι το e και αυτή είναι η ιδιότητα που κάνει το e βάση των φυσικών λογαρίθμων. Οι πρώτες εμφανίσεις του e στα μαθηματικά πέρασαν απαρατήρητες. Είδαμε ότι η ''βάση'' των λογαρίθμων του Napier συνέπιπτε σε 8 ψηφία με την τιμή του 1/e. Όμως η ανάπτυξη των λογαρίθμων εκείνη την εποχή δεν στηριζόταν στην έννοια της βάσης και αυτό είχε σαν αποτέλεσμα ο αριθμός e να παραμένει ασύλληπτος αν και ουσιαστικά ήταν κρυμμένος στη γωνία. Ο κεντρικός ρόλος του e στην Ανάλυση τονίζεται για πρώτη φορά από τον Leonard Euler (1707-1783) στο έργο του *Introductio in analysin infinitorum* (Berlin 1748) (Euler 1748/1990). Το e οφείλεται στον Euler που το χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το 1728 σε ένα χειρόγραφό του (Maor 1994: 156). Υπάρχουν πολλές απόψεις για την επιλογή του γράμματος e από τον Euler. Σύμφωνα με μια από αυτές, ο Euler το επέλεξε επειδή είναι το πρώτο γράμμα της λέξης εκθετικός (exponential). Κατά μια άλλη το e προέρχεται από την λέξη ein (ένα στα Γερμανικά) ή einheit (μονάδα), η οποία εκφράζει την βασική ιδιότητα του ορισμού του e (ένας αριθμός που έχει λογάριθμο μονάδα). Πιο πιθανή φαίνεται να είναι η άποψη ότι το e είναι το επόμενο φωνήεν μετά το a, διότι ο Euler χρησιμοποιούσε φωνήεντα για να συμβολίζει τις σταθερές και στην εργασία του είχε ήδη χρησιμοποιήσει το a. Η άποψη ότι ο Euler επέλεξε το e επειδή ήταν το αρχικό του ονόματός του φαίνεται τελείως αβάσιμη διότι ήταν ένας πολύ σεμνός άνθρωπος, ο οποίος δεν επεδίωκε την προβολή του και μάλιστα σε τέτοιο σημείο που συχνά καθυστερούσε την έκδοση μιας εργασίας του ώστε το αποτέλεσμά της να κατοχυρωθεί σε κάποιο συνάδελφο ή φοιτητή (Maor 1994: 156).

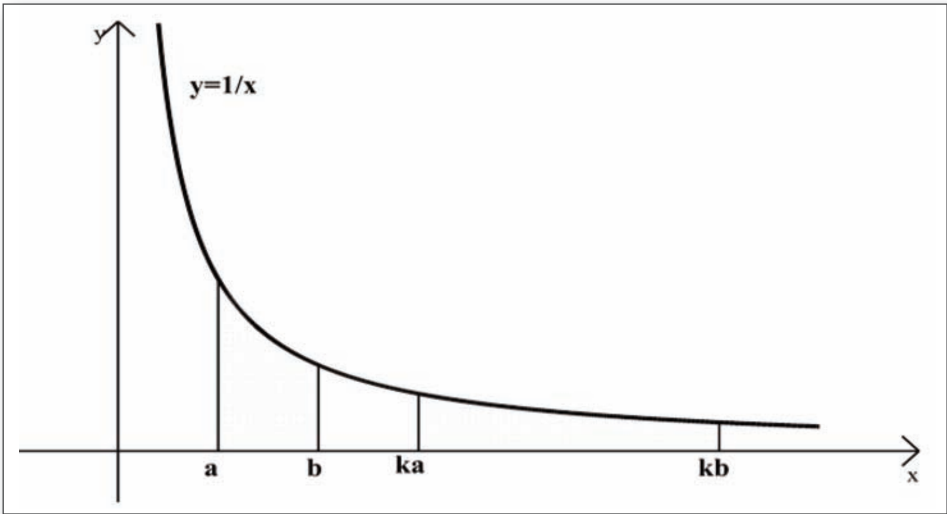
2. Τυπική παρουσίαση της θεωρίας

Αρχίζουμε με την ιστορική εκείνη πρόταση του Gregory of Saint Vincent στην οποία είχε, ουσιαστικά, αποδειχθεί, η λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής (§1.3). Εδώ διατυπώνουμε την πρόταση με ένα ισοδύναμο τρόπο, ο οποίος χρησιμοποιείται πιο αποτελεσματικά στα επόμενα.

Πρόταση του Gregory of St-Vincent. Για $0 < a < b$ θέτουμε $E_{a,b}$ = το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x, των ευθειών $x = a$, $x = b$ και της υπερβολής $y = 1/x$. Τότε για $k > 0$ ισχύει (Σχ. 2)

$$\mathbf{E_{ka,kb} = E_{a,b}}$$

Σχήμα 2: Το εμβαδόν κάτω από την υπερβολή και μεταξύ a και b είναι ίσο με αυτό μεταξύ ka και kb (1<a<b)



Απόδειξη.

Για να συγκρίνουμε αναλυτικά τα δύο εμβαδά, διαιρούμε κάθε διάστημα [a, b] και [ka, kb] σε n υποδιαστήματα ίσου μήκους και προσεγγίζουμε κάθε εμβαδόν με n ορθογώνια. Αποδεικνύεται ότι τα ορθογώνια σε κάθε διάστημα έχουν το ίδιο άθροισμα εμβαδών και, καθώς το ν αυξάνεται $E_{a,b} = E_{ka,kb}$ (π.χ., Panagiotou 2011).

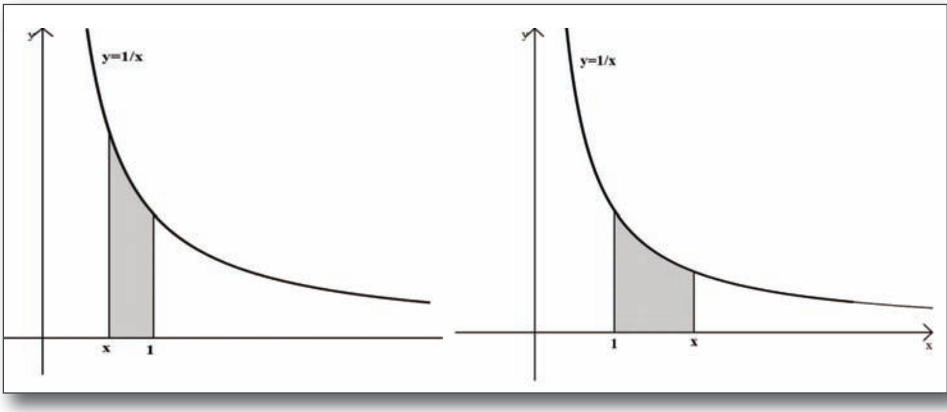
Πόρισμα. Αν τα τμήματα OK, OL, OM, ON αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, τότε τα εμβαδά (ABLK), (ACMK), (ADNK) αποτελούν αριθμητική πρόοδο (Σχ. 1).

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $OK = 1$, $OL = \lambda$, $OM = \lambda^2$, $ON = \lambda^3$. Τότε τα εμβαδά $(ABLK) = E_{1,\lambda}$, $(BCML) = E_{\lambda,\lambda^2}$, $(CDNM) = E_{\lambda^2,\lambda^3}$, είναι ίσα μεταξύ τους σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Άρα τα εμβαδά (ABLK), (ACMK), (ADNK) αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Όλη η μέχρι τώρα συζήτησή μας δικαιολογεί τον επόμενο ορισμό:

Ορισμός $$\ln x = \begin{cases} E_{1,x} & , \text{αν } x > 1 \\ 0 & , \text{αν } x = 1 \\ -E_{x,1} & , \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

Σχήμα 3: Ο ορισμός του φυσικού λογαρίθμου

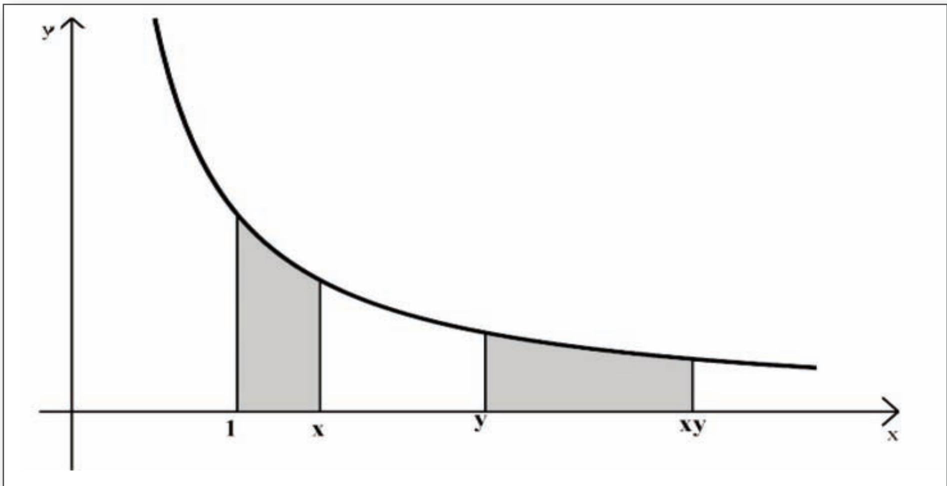


Αποδεικνύουμε τη βασική ιδιότητα της λογαριθμικής συνάρτησης της μετατροπής του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση.

Πρόταση. Αν x, y > 0, τότε **ln(xy) = lnx + lny**

Απόδειξη.

Σχήμα 4: ln(xy) = lnx + lny



Έστω $1 < x \leq y$. Τότε $xy > x$ και $xy > y$ (Σχ. 4). Οπότε

$$L(xy) = E_{1,xy} = E_{1,y} + E_{y,xy} = L(y) + E_{y,xy} \qquad (1)$$

Όμως, από πρόταση του Gregory, προκύπτει ότι

$$E_{y,xy} = E_{1,x} \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) παίρνουμε $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Όμοια αποδεικνύονται και οι περιπτώσεις: $0 < x \leq y \leq 1$ και $0 < x \leq 1 \leq y$.

Πόρισμα.

(α) Αν $x>0$ και ρ ρητός αριθμός, τότε $\ln(x^\rho) = \rho \ln x$

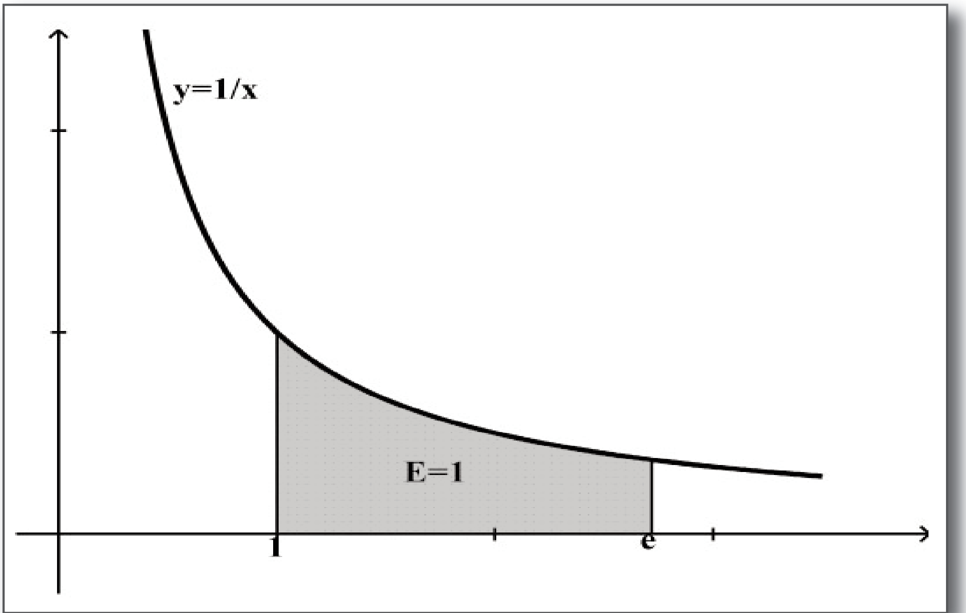
(β) Αν $x, y > 0$, τότε $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$

Η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη.

Ορισμός του αριθμού e.

Η λογαριθμική συνάρτηση $y = \ln x$ είναι γνήσια αύξουσα και δεν είναι φραγμένη άνω ή κάτω (π.χ., Panagiotou 2011). Είναι διαισθητικά σαφές ότι η γραφική παράσταση τέμνει κάθε οριζόντια γραμμή $y = y_0$ σε ένα ακριβώς σημείο. Επομένως αν δοθεί οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός y_0, υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός x_0 ώστε $\ln x_0 = y_0$. Επομένως, *για y = 1 υπάρχει ένας μόνο αριθμός που ο λογάριθμός του είναι ίσος με 1*. Αυτός ο αριθμός πρέπει να είναι το e, ο αριθμός που έχει φυσικό λογάριθμο ίσο με 1 (βλέπε και τα σχόλια στην §1.3). Ορίζουμε, λοιπόν, ***e να είναι ο αριθμός για τον οποίο είναι*** $\boldsymbol{\ln e = 1}$***, δηλαδή το εμβαδόν*** $\boldsymbol{E_{1,e} = 1}$ (Σχ. 5).

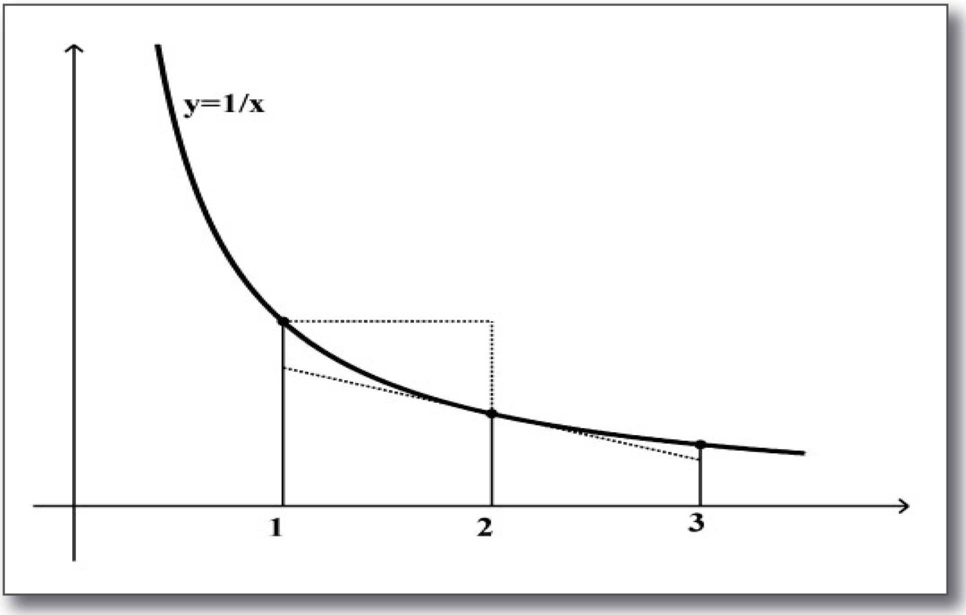
Σχήμα 5: Ο ορισμός του e



Μια αρχική εκτίμηση για το e μπορούμε να πάρουμε από το σχήμα (6). Παρατηρούμε ότι ln2 είναι μικρότερο από το εμβαδόν του τετραγώνου με βάση το διάστημα [1, 2] και ύψος 1, οπότε ln2 < 1. Επίσης ln3 είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τραπεζίου που ορίζεται από τον άξονα x′x, τις ευθείες x = 1, x = 3 και την εφαπτομένη στο σημείο με συντεταγμένες (2, 1/2), οπότε ln3 > (3 – 1) · 1/2 = 1. Βρήκαμε έτσι ότι :

$$\mathbf{2 < e < 3}$$

Σχήμα 6: Μια αρχική εκτίμηση του e: 2 < e < 3



Μια καλύτερη εκτίμηση για τον e θα πάρουμε αποδεικνύοντας τον επόμενο ισχυρισμό:

$$\mathbf{e = \lim_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu}}$$

Στο όριο αυτό οδηγήθηκε ο Jacob Bernoulli (1683) όταν μελετούσε το πρόβλημα του ανατοκισμού. Ο ίδιος μπόρεσε να αποδείξει ότι το όριο έπρεπε να βρίσκεται μεταξύ 2 και 3. Δεν αναγνώρισε όμως κάποια σχέση της εργασίας του με τους λογαρίθμους.

Στο σχήμα (6) είναι $x = 1 + \frac{1}{\nu}$, όπου ν τυχαίος φυσικός αριθμός. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι μεταξύ των ορθογωνίων που έχουν βάση το διάστημα [1, x] και ύψη 1/x και 1 αντίστοιχα. Άρα

$$(x-1)\cdot\frac{1}{x} < \ln x < (x-1)\cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu+1} < \ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \frac{\nu}{\nu+1} < \ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < 1.$$

Παίρνουμε τα όρια καθώς ν → +∞ και βρίσκουμε $1 \le \ln\left(\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right) \le 1$, οπότε $\ln(\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}) = 1$.

Επειδή lne = 1 και η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1 – 1, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e \qquad .$$

Αν χρησιμοποιήσουμε ένα υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων ότι e = 1,71828. Ο αριθμός e με προσέγγιση 10 δεκαδικών ψηφίων είναι e = 2,718281828 και ενδεχομένως η μορφή αυτή να οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Ο διδάσκων πρέπει να τονίζει στους μαθητές ότι ο αριθμός e είναι άρρητος (π.χ., Rudin, 1964).

Επισημαίνουμε ακόμη ότι πολλές βασικές προτάσεις που συναντάμε στην ύλη της Γ′ Λυκείου δίνονται χωρίς απόδειξη με την αιτιολογία ότι είναι πέρα από τις δυνατότητες των μαθητών. Με τον ορισμό του λογαρίθμου που δόθηκε στην παρούσα εργασία οι αποδείξεις αυτές είναι απλές και κατανοητές (π.χ., Panagiotou, 2011). Η εργασία ολοκληρώνεται με τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης e^x, ως αντίστροφης της λογαριθμικής (idem).

3. Συμπεράσματα

Η αξία της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία έχει επισημανθεί εδώ και εκατό χρόνια στο διεθνή αλλά και στον Ελληνικό χώρο. Το ενδιαφέρον των καθηγητών για την ιστορία των μαθηματικών αυξάνεται όπως προκύπτει από τον αυξανόμενο αριθμό βιβλίων και άρθρων ιστορικού περιεχομένου, από τον αυξανόμενο αριθμό των ερευνητικών ομάδων που μελετούν την χρησιμοποίηση και την αξία της ιστορίας στην διδασκαλία των μαθηματικών (Fauvel & van Maanen 2000, Gulikers & Blom 2001)). Η θετική συμβολή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών εντοπίζεται κυρίως στα επόμενα τρία επιχειρήματα:

- Η ιστορία των μαθηματικών βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και αποδείξεις δείχνοντας από πού προήλθαν και πως εξελίχθηκαν.
- Η ιστορία των μαθηματικών αναδεικνύει την ανθρώπινη πλευρά των μαθηματικών. Τα μαθηματικά είναι ανθρώπινη και δυναμική δραστηριότητα, η οποία επηρεάζεται από κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες και διαμορφώνονται σύμφωνα με τις υλικές και πνευματικές ανάγκες της εποχής.
- Η ιστορία των μαθηματικών αυξάνει το ενδιαφέρον των μαθητών για μάθηση και συμβάλλει στη διαμόρφωση μιας θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά και

Είναι όμως γεγονός ότι σχεδόν σε όλα τα σχολικά βιβλία δεν λαμβάνονται υπ' όψιν τα προηγούμενα επιχειρήματα. Ποτέ δεν παρουσιάζονται οι προσπάθειες και οι αποτυχίες που οδήγησαν στις έννοιες που περιγράφουν. Η παρουσίαση με την μορφή Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη – Πόρισμα μπορεί να είναι κομψή και να κερδίζει χρόνο αλλά οι μαθητές μένουν με την απορία: Πως προέκυψε η ιδέα για τους ορισμούς αυτούς και αυτά τα θεωρήματα; Κατά τον Freudenthal (1973: 107):

> *"Οι βασικοί ορισμοί δεν πρέπει να εμφανίζονται στην αρχή της εξερεύνησης, επειδή για να ορίσεις κάτι πρέπει να ξέρεις τι είναι και σε τι χρησιμεύει".*

Τι μπορούμε να προσφέρουμε στους μαθητές; Να τους κάνουμε να δουν γιατί και πως προέκυψε αυτό που διδάσκονται σήμερα. Στην κατάκτηση της αφηρημένης έννοιας, η ιστορία του ανθρώπου συναντά αυτήν της ανθρωπότητας. Η εισαγωγή της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι θέμα *περιεχομένου*. Είναι θέμα *στάσης* και πρόβλημα *εικόνας* της επιστήμης των μαθηματικών.

Είναι αναμφισβήτητο ότι ο αφηρημένος ορισμός της λογαριθμικής συνάρτησης σαν αντίστροφη της εκθετικής έχει κάποια πρακτική αξία μέσα στο ασφυκτικό αναλυτικό πρόγραμμα, αφού επιτρέπει την άμεση εξαγωγή των ιδιοτήτων των λογαρίθμων από τις ιδιότητες των δυνάμεων. Αυτό είναι αξιοκατάκριτος ωφελιμισμός που περιφρονεί κάθε αρχή διδασκαλίας και τον οποίο πρέπει αναμφίβολα να καταδικάσουμε. Με αυτό τον τρόπο δίνεται η εντύπωση ότι τα μαθηματικά έχουν πέσει έτοιμα από τον ουρανό και για να χρησιμοποιηθούν από γεννημένους ταχυδακτυλουργούς. Η διδασκαλία των λογαριθμικών εννοιών με βάση την ιστορική εξέλιξη παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Η μέθοδος της προσθαφαίρεσης μας δίνει μια πρώτης τάξεως ευκαιρία να τονίσουμε στους μαθητές την χρησιμότητα των τύπων της τριγωνομετρίας που μετατρέπουν γινόμενα σε αθροίσματα. Αυτό το παράδειγμα έχει πολύ μεγαλύτερη αξία από την στείρα χρήση των τύπων στην λύση ασκήσεων ρουτίνας διότι πραγματικά συμβάλει στην ευρύτερη κατανόηση της τριγωνομετρίας από τους μαθητές και αυξάνει την εκτίμησή τους προς αυτό το μάθημα. Επίσης η θεώρηση των τριγωνομετρικών αριθμών σαν μηκών, και όχι σαν λόγων, επιτρέπει την εξήγηση της προέλευσης των λέξεων ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και τέμνουσα.

- Συνδέει δημιουργικά την νέα ενότητα με την αμέσως προηγούμενη των προόδων αξιοποιώντας προηγούμενες γνώσεις των μαθητών.
- Δείχνει την αρχική χρησιμότητα των λογαρίθμων στην απλοποίηση των αριθμητικών υπολογισμών
- Δικαιολογεί την προέλευση του όρου λογάριθμος.
- Συνδέει την νέα ενότητα με τη μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 1/x$.
- Αξιοποιεί τις γνώσεις πάνω στις κωνικές τομές.
- Δικαιολογεί τι είναι ''φυσικό'' στους φυσικούς λογαρίθμους καθώς και τη σχέση τους με τον αριθμό e.
- Εξασφαλίζει μια μοναδική υποδομή, πάνω στην οποία μπορεί να στηριχτεί αργότερα η συστηματική διδασκαλία του ολοκληρωτικού λογισμού.
- Επιτρέπει την απόδειξη σημαντικών ιδιοτήτων της λογαριθμικής συνάρτησης, με βάση ένα γεωμετρικό μοντέλο.
- Επιτρέπει την κατανόηση της σημασίας του καλού συμβολισμού για την ανάπτυξη των μαθηματικών και τέλος
- Μπορεί να συνδυαστεί με πολλές ενδιαφέρουσες δραστηριότητες. Ανάλογα με το διαθέσιμο χρόνο, είναι ωφέλιμο αλλά και απολαυστικό το παίξιμο με το συμβολισμό του εξηκονταδικού συστήματος. Για τους μαθητές που έχουν κάποια εμπειρία με ασκήσεις στις οποίες πρέπει να βρεθεί ο νόμος, το πρότυπο, με τον οποίο σχηματίζεται μια ακολουθία αριθμών, υπάρχουν ενδιαφέροντα σχετικά θέματα στην πινακίδα Plimpton 322. Ωφέλιμη επίσης δραστηριότητα θα ήταν μια συνθετική εργασία για την εξέλιξη του συμβολισμού, ιδιαίτερα του εκθετικού, από την εποχή του Chuquet μέχρι τα μέσα $18^{ου}$ αιώνα.

Ο Felix Klein έχει προτείνει να χρησιμοποιείται η ισότητα:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_c^{cx} \frac{dx}{x}$$

σαν βάση για τον ορισμό των λογαρίθμων. Η πρόταση του Gregory of St Vincent είναι ακριβώς η μετάφραση αυτής της ολοκληρωτικής σχέσης στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών της Β' Λυκείου. Ο ίδιος προσθέτει (Klein 1908/1945: 156): ''*Εύχομαι κάποιος να κάνει πρακτική εφαρμογή αυτής της πρότασης στα σχολεία. Τις λεπτομέρειες* *υλοποίησης της πρότασης πρέπει να ρυθμίσει ο έμπειρος δάσκαλος''*. Τελειώνουμε με την ελπίδα πως το αναλυτικό πρόγραμμα θα επιτρέψει κάποια μέρα την εφαρμογή αυτής της παρουσίασης στα σχολεία.

Σημείωση

1. Εκτενέστερη μορφή του άρθρου έχει δημοσιευτεί με τα εξής στοιχεία: Panagiotou, E.N. [2011]: Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Science & Education*, 20(1), 1-35.

Βιβλιογραφία

Ι. Ελληνική

Παναγιώτου, Ε. (2004) Στον δρόμο προς τους λογαρίθμους. *Το φ*, 53-62.

ΙΙ. Μεταφράσεις

Eves, H. (1983) *Great moments in Mathematics – Before 1650*. Washington: Mathematical Association of America. Μετάφραση στα Ελληνικά από Μ. Κωνσταντινίδης & Ν. Λιλής, *Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών – Πριν το 1650*. Αθήνα: Τροχαλία, 1989.

Van der Waerden, B.L. (1961) *Science Awakening*. New York: Holt, Rinehart and Winston. Μετάφραση στα Ελληνικά από Γ. Χριστιανίδης, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.

ΙΙΙ. Ξενόγλωσση

Ayoub, R. (1993) What is a Napierian Logarithm ? *American Mathematical Monthly*, 100(4), 351-364.

Burn, R.P. (2001) Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. *Historia Mathematica* 28, 1-17.

Cajori, F. (1913) History of the exponential and logarithmic concepts. *The American Mathematical Monthly*, Vol. XX.

Cajori, F. (1928) *A History of Mathematical Notations*. Chicago: Open Court.

Dhombres, J. (1993) Is one proof enough? Travels with a mathematician of the Baroque period. *Educational Studies in Mathematics* 24, 401-419.

Edwards, C.H. (1979) *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer – Verlag.

Euler, L. [1748/1990] : *Introduction to Analysis of the Infinite*, Books I and II (J.D. Blanton, trans.). New York: Springer-Verlag.

Euler, L. (1984) *Elements of algebra*, (John Hewlet, Trans.). New York: Springer.

Fauvel, J. & J. van Maanen (2000) *History in mathematics education, The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1973) What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education, in A.G. Howson (ed.): *Developments in Mathematical Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 101-114.

Gulikers, I. & K. Blom (2001) A historical angle, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223–258.

Huygens, C. (1651) *Theoremata de quadratura, hyperboles, elipsis et circuli*. Leiden. Reprinted in *Oeuvres completes de Christiaan Huygens*, vol. XI. The Hague: Société Hollandaise des Sciences, 1888-1950.

Klein, F. (1908) *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic – Algebra – Analysis* (translated from the German by E. R. Hedrick and C. A. Noble). New York: Dover Publications 1945.

Maor, E. (1994) *e – The History of a Number*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Mercator, N. (1668) Logarithmotechnica. London: Wm. Godbid/Moses Pitt.

Moulton, J.F. (Lord Moulton) (1915) The invention of logarithms and its genesis and growth. In C.G. Knott (Ed.), *Napier tercentenary memorial volume* (pp. 1–32). London: Longmans Green and Co.

Napier, J. (1614) *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Edinburgh. English translation by E. Wright, *A description of the admirable table of logarithms*. London: Samuel Wright, 1616.

Napier, J. (1619) *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. Edinburgh. English translation by W. R. Macdonald, *The construction of the wonderful canon of logarithms*. Edinburgh: Blackwood, 1889.

Panagiotou, E.N. (2011) Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Science & Education*, 20(1), 1-35.

Resnikoff, H.L. & R.O. Wells, Jr. (1984) *Mathematics in Civilization*. New York: Dover Publications.

Rudin, W. (1964) *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw – Hill Book Company (2nd ed).

Smith, D. E. (1915) The law of exponents in the works of the sixteenth century. In C.G.

Knott (Ed.), *Napier tercentenary memorial volume* (pp. 81–91). London: Longmans Green and Co.

Struik, D. J. (1968) *A Short History of Mathematics*. New York: Dover Publications, 3rd ed.

Van der Waerden, B. L. (1961) *Science awakening*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Whiteside, D. T. (1967–1976) *The mathematical papers of Isaac Newton* (Vol. I, II). Cambridge: Cambridge University Press.

HISTORY IN THE MATHEMATICS LABORATORY: AN EXPLORATORY STUDY

Adriano Demattè
Liceo 'Rosmini' Trento

Fulvia Furinghetti
University of Genoa, Italy

Abstract

According to some researchers one of the ways of using history in mathematics teaching is the hermeneutic approach. In this paper we report on a classroom experiment where the teacher (A. D.) tried to apply this procedure in teaching the topic "exponential and logarithms" to 18-19 year-old students attending the final year of an Italian high school. The used historical sources are excerpts from Euler's *Introductio in analysin infinitorum.* The involved students have a low motivation to study mathematics and their learning difficulties emerged also in our experiment. This fact stressed some elements of problematization of the hermeneutic approach that will be discussed in this paper.

Key words

Mathematics teaching; historical sources; Euler; hermeneutic approach; classroom experiment; low motivation.

Περίληψη

Σύμφωνα με υπάρχουσες έρευνες ένας τρόπος αξιοποίησης της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι η «ερμηνευτική προσέγγιση». Σ' αυτό το άρθρο αναλύουμε μια πειραματική διδασκαλία όπου ο καθηγητής (ο πρώτος εκ των συγγραφέων) προσπαθεί να εφαρμόσει αυτή την προσέγγιση στη διδασκαλία του θέματος "εκθετικές συναρτήσεις και λογάριθμοι" με μαθητές της τελευταίας τάξης του Ιταλικού Λυκείου (18-19 ετών). Οι ιστορικές πηγές που χρησιμοποιήθηκαν είναι αποσπάσματα από το βιβλίο του Euler *Introductio in analysin infinitorum.* Οι εμπλεκόμενοι μαθητές είχαν περιορισμένα κίνητρα για τη σπουδή των Μαθηματικών και οι δυσκολίες τους στα Μαθηματικά εμφανίζονται και στην πειραματική μας διδασκαλία. Το γεγονός αυτό επισημαίνει ορισμένα στοιχεία προβληματισμού όσον αφορά στην «ερμηνευτική προσέγγιση», τα οποία συζητούνται σ' αυτό το άρθρο.

Λέξεις Κλειδιά

Διδασκαλία μαθηματικών, Ιστορικές πηγές, Euler, ερμηνευτική προσέγγιση, πειραματική διδασκαλία, περιορισμένα κίνητρα.

0. Introduction

In this paper we discuss an experiment on the use of primary sources in mathematics teaching with particular reference to the educational problem of getting students to understand, that is to say to build meanings in the mathematics classroom. In this concern Gardner (1991) is quite pessimistic. He maintains that "Even though educational systems may pay lip-service to goals like 'understanding' or 'deep knowledge' they, in fact, prove inimical to the pursuit of these goals." For this reason he has "sought to challenge the conception that one can get student to understand simply by presenting them with good models or with compelling demonstrations, as well as the idea that students who do not understand must simply work harder or adhere to the correct-answer compromise." For Gardner the students have to learn to make new, different, and strategic uses of the sources of information around them. He also claims "If we are to achieve a milieu in which understanding is prized, it is necessary for us all to be humble about what we know and to move away from our present, invariably inadequate perspectives ...".

We share Howard Gardner's concern about the understanding and we feel that our positive orientation about the use of history in the mathematics classroom may offer the new perspective we look for and new sources of information for students. As we will see, suitable conditions have to be created to achieve our goal.

Demattè (2004; 2006) has outlined two main roles of the use of history in mathematics teaching: the "strong" role and the "weak" role. The strong role is based on didactical activities that are directly inherent to history, the weak role confines the use of history to mathematics. A similar distinction is introduced by Jankvist (2009). This author considers the use of *history as a goal* and the use of *history as a tool*. The first does not serve the primary purpose of being an aid, but rather that of being an aim in some sense. In contrast, a use of history as a tool concerns the use of history as an aid in the teaching and learning of mathematics. In the same vein Furinghetti (1997) identifies two main aims of the integration of the history in the teaching of mathematics: promoting mathematics, that is acting on the image of mathematics by setting it in a wider cultural context, and reflecting on mathematics, that is dealing with mathematical concepts. This second aim refers to the fact that history brings back the modern concepts and theories presented in a polished form to their cognitive roots. With the first aim the discipline is set in the context of human civilization and broaden the scope of mathematics teaching to other disciplines. This aim supports cultural understanding. As Jahnke et al. (2000, p. 292) put it

> Integrating history of mathematics invites us to place the development of mathematics in the scientific and technological context of a particular time and in the history of ideas and societies, and also to consider the history

> of teaching mathematics from perspectives that lie outside the established disciplinary subject boundaries.

Of course, the two aims may have commonalities. In this paper we are mainly concerned with the strong role of history and the general cultural value fostered by it, nevertheless we will see that the construction of meaning for mathematical concepts will be considered too.

1. Theoretical frame

In Italy the school situation and the recommendations of the new programs encourage promoting the cultural understanding in the teaching of mathematics. Moreover these programs suggest organizing activities in the mathematics laboratory. The concept of mathematics laboratory is an old one. Already in 1895 Adelia Roberts Hornbrook wrote a pamphlet (*Laboratory methods of teaching mathematics in secondary schools.* New York: Cincinnati American Book Company) focused on this subject. The idea developed in the first decades of twentieth century elsewhere, especially in France and UK, see (Giacardi, 2013). In subsequent years it was revitalized in connection with the interest for manipulatives and concrete materials, see (Furinghetti & Menghini, 2014). When computers appeared in mathematics education the mathematics laboratory acquired a new role and importance, see (Hynes, Hynes, Kysilka & Brumbaugh, 1973). Parallelly to the view of laboratory as a place where to carry out bodily activities with manipulatives and, later on, with information technology, the view emerged that the mathematics laboratory

> is not a physical space outside the classroom, but is rather a structured set of activities aimed at constructing the *meanings* of mathematical objects. Thus, the laboratory involves people (students and teachers), structures (classrooms, instruments, organization of spaces and times), and ideas (projects, plans for educational activities, experimentation). (Matematica 2003, p. 28, our translation).

The mathematics laboratory philosophy is in line with the actual trend in mathematics education that advocates the active participation of students and the interaction in the classrooms, so that the students become the main characters of the mathematics classroom.

The experiment reported in this paper shows how history of mathematics can be used with the aim of fulfilling the indications of the new Italian programs reported above, and, in particular, with the aim of making the mathematics laboratory a place where to develop the cultural understanding.

Among the researchers investigating on the use of history there is a solid agreement on the pedagogical efficacy of the use of original historical sources in mathematics teaching, see Furinghetti, Jahnke & van Maanen, 2006; Jankvist, 2014; Pengelley, 2011). For our purposes in the classroom we considered some experiment that was based on the hermeneutic approach to original sources, see (Bagni, 2008; Glaubitz, 2011).

Jahnke (2014, pp. 83-84) outlines the basic guidelines of the hermeneutic procedure as follows:

1. Students study a historical source *after* they have acquired a good understanding of the respective mathematical topic in a *modern* form and a *modern perspective*. The source is studied in a phase of teaching when the new subject-matter is applied and technical competencies are trained. Reading a source in this context is another manner of applying new concepts, quite different from usual exercises.
2. Students gather and study information about *context* and *biography* of the author.
3. The historical *peculiarity* of the source is kept as far as possible.
4. Students are encouraged to produce *free associations*.
5. The teacher insists on *reasoned arguments*, but not on accepting an interpretation which has to be shared by everybody.
6. The historical understanding of a concept is contrasted with the modern view, that is the source should encourage processes of reflection".

These points make clear the potentialities of the method. The students have the chance of getting in touch with the historical method (points 2 and 3), of making conjectures and proving them (points 4 and 5), and of reflecting on modern notations by making sense of historical mathematical text (points 1 and 6).

2. Method

The experiment was carried out in the final year of a "Liceo delle scienze umane" (Lyceum of human sciences), with 20 students (three boys, 17 girls) aged 18-19. The students worked in pair formed spontaneously by the students themselves and at the end presented an individual report. The ideas put forwards were discussed during the sessions. The activities were carried out in the classroom, where there was one computer and Internet facilities. The school has a humanistic orientation and the students have poor motivation towards mathematics. Since the first year of upper secondary school their curriculum included the innovations contemplated by the Italian reform launched in 2010-2011. This reform is not changing so much the existing situation, nevertheless it offers some chances to carry out some non-traditional activities. For example, in the third, fourth, and fifth year there are two hours per week devoted to deepening a subject chosen by students, and a subject (not linguistic, such as Latin or foreign languages) is taught in a language of the European community by the teacher with a mother language assistant (at least 20 hours per year). In our experiment the subject taught in the foreign language (English) was mathematics.

In the activity here reported the teacher is one of the authors (A. D.) In the previous years the students had a different teacher, then the methods and the style of the teaching (including his orientation towards a historical perspective) of the present teacher were new for them.

The mathematical topic developed was the function concept. He has planned to present other topics of Calculus in the last part of the course, compatibly with the reduction of the amount of hours dedicated to mathematics. The students were presented with historical documents dealing with topics suitable to prepare to the topic "function". The stages of the work were the following:

- Presentation of the task, which consisted in interpreting a historical source (Euler, Appendix 1)
- Two hours dedicated to working on the task
- Suggestions for making students going on, when the students did not achieve significant results (which was our case)
- A first test containing questions after reading the documents (Appendix 3)
- Further questions to prepare students to the assessment test (Appendix 4)
- Final test for assessing students (Appendix 5).

The proposed original source was some excerpts from *Introductio in analysin infinitorum* (Euler, 1748) translated into English by J. D. Blanton (1988), see Appendix 1. The fact that the students were attending these lessons in English turned to be an element that favored the development of the experiment. The teacher stressed that the main goal of the activity was exploiting the mathematics they have learned in a new way and using personal resources to conjecture and explore.

The given task was to read and interpret the historical passages, e.g. to write the document in the current Italian, to guess about the meaning of the full documents and its specific parts and to compare the individual interpretations through the discussion. The teacher assisted the work, listened to students' questions, and answered through hints or other questions that could help them to reflect. In order to give further opportunities for better understanding and for reviewing all contents, he suggested comparing their answers: standing in front of their classmates, most of them read at least one of their answers; they could also briefly criticize the mates' outputs.

As stated in the Preface reported in Appendix 2 Euler's treatise was originally conceived for beginners. Unfortunately in our experiment most students did not have the necessary prerequisites; this was the case of some of them (Anna, Alessandro, Chiara and Valentina). For example, in treating exponential and logarithmic Euler introduces in an informal manner examples of limits. This fact may have contaminated the hermeneutic approach (see guideline 1 of Jahnke (2014)), since the students still had some difficulties about these concepts.

The request of interpreting the document was addressed to all students, but, according to the students' different needs, with different aims: remedial for lacking notions, deepening of concepts, application of concepts which are different from the usual exercises, ...).

Students were asked to perform further tasks such as gathering information about the context and the biography of the historical author. This was made through the website, but in a rather inaccurate way.

3. Outcomes and discussion

Lampert (1990) claims that "When a student is in charge of revising his or her own thinking, and expected to do so publicly, the authority for determining what is valid knowledge is shifted from the teacher to the student and the community in which the revision is asserted". (p. 52) Then, in principle, the hermeneutic approach carried out in the way described above should foster the devolution of authority from the teacher to the students. In practice, the students did not show significant disposition to produce free associations. Our interpretation of this behavior refers to the students' low self-confidence linked to their view of classroom life. In their school biography there are not teaching situations in which putting forwards personal ideas and producing free associations and personal conjectures may turn to be an occasion for getting good marks. The consequence is that the students were asking themselves: which rules their performances should follow; whether their rules were matching the teacher's rules? When they met difficulties to understand the text, either because of the English language, and/or their poor practice to read mathematical texts, they could not decide about the validity of their performance. For example, a doubt was whether their understanding of the text was inadequate because they were not able to answer the questions generated by themselves about specific parts of the document.

In this context, the historical source was used just as a script for realizing performances operational for what they were thinking could be the teacher's expectations. The teacher and researcher's aims were: to recover and to deepen the meaning of concepts through the use of the historical source; to enhance the ability in argumentation by asking themselves questions originated from the historical document trying to answer through reflection and discussion with the other groups. These aims were not considered by the students for their perception of the didactic contract.

In summary we may say that the task we gave to the students may be understood in two ways:

- To talk about the document so that the document becomes an object of study. For example, the student may note that the document presents an approach to the concept of exponential and logarithm and may focus on particular aspects of this issues
- To rephrase the historical document by using modern symbols and approach.

The comparison of the excerpts from Euler's treatise (Appendix 2) with the text produced by a student in answering to the questions proposed by the teacher (Appendixes 5, 5′, 5′′) shows that the second way was taken into consideration. As discussed by Arcavi and Isoda (2007) the translation to modern notation was a useful strategy for making sense of the historical document. The need of working in the classroom with the aim of passing examinations fostered an interpretation of the task as a temporary action towards the stage in which the interpretation was "shared by everybody".

The task given to the students was accompanied by the requirement: "When performing the task, record on the sheet also your abandoned ideas, failed attempts etc. This record will be used in our classroom discussion. If you want to erase what you have written, please just strike through so that the original text may be seen". This means that the students were asked to describe as much as possible their process (including unsuccessful attempts) of approaching the historical document. It was expected that the groups would provide different outcomes. Unfortunately the students did not care of the suggestion in the task. In front of the new situation presented by the hermeneutic approach they preferred to negotiate some aspects of the didactic contract. Their negotiation was based on the questions about the rules to be followed and the teacher's expectation. It was carried out by some students selected as "spokespersons" and through a classroom discussion. The following sentence by a student expresses the general feeling:

This is an easy document. I do not know what to say about it and how to rephrase it.

4. Reflections and preliminary conclusions

Our experiment has an exploratory character and allows us to outline some open questions that may be considered in future research and in our future practice in the classroom. The first question concerns the cognitive value of the concepts encountered in Euler's document. In other words are the students ready to use these concepts in other contexts? How they feel the sense of commonality with other persons and with the modalities these persons (mates or adults) learn the same topics? The main underlying question is: do the students consider Euler an added value to their mathematics learning or simply an oddity introduced by the teacher.

About the research on the use of history in mathematics teaching some members of the HPM Study Group advocate a strict link between pedagogical and historical issues, see (Jankvist, Mosvold, Fauskanger & Jakobsen, in press). We deem that our experiment goes in this direction, since our analysis and discussion show that the outputs of our experiment are strongly dependent on the conditions affecting it. In our case the beliefs about mathematics learning, didactic contract, and devolution of authority have affected the behavior of students facing the task involving the historical document. These issues are fundamental issues in research in mathematics education. The analysis reported in this study shows how the discussion on the use of history acquires meaning and efficiency if it is set in the suitable framework of mathematics education research.

References

Arcavi, A. & Isoda, M. (2007) Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 111-129.

Bagni, G. T. (2008) Historical references and mathematics education: an hermeneutic perspective. In M. V. Thomase (Ed.), *Science Education in Focus* (Chapter 11, pp. 291–306). New York: Nova Publishers.

Demattè, A. (2004) A questionnaire for discussing the "strong" role of the history of mathematics in the classroom. In F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of HPM2004 & ESU4*, (pp. 218-228). Uppsala Universitet: Uppsala.

Demattè, A. (2006) A questionnaire for discussing the "strong" role of the history of mathematics in the classroom. In F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings HPM 2004 & ESU 4 – Revised edition* (214-228). Iraklion, Greece: University of Crete.

Euler, L. (1748) *Introductio in analysin infinitorum*. Lausannae: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios. J. D. Blanton (transl.) (1988). *Introduction to analysis of the infinite, Book 1*. New York: Springer. [Preface; pp. 75-76; pp. 76-80].

Furinghetti, F. (1997) History of mathematics, mathematics education, school practice: case studies linking different domains. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 55-61.

Furinghetti, F., Jahnke, H. N. & van Maanen, J. (2006) Mini-workshop on studying original sources in mathematics education. *Oberwolfach Reports 3*(2), 1285-1318.

Furinghetti, F. & Menghini, M. (2014) The role of concrete materials in Emma Castelnuovo's view of mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 87*. 1-6.

Gardner, H. (1991) *The unschooled mind: How children think and schools should teach*. New York: Basic Book.

Giacardi, L. (2013) The emergence of the idea of the mathematics laboratory at the turn of the twentieth century. In K. Bjarnad ttir, F. Furinghetti, J. M. Matos & G. Schubring (Eds.), *"Dig where you stand" 2. Proceedings of the second "International Conference on the History of Mathematics Education"* (pp. 203-225). Caparica: UIED.

Glaubitz, M. R. (2011) The use of original sources in the classroom. In E. Barbin, M. Kronfellner & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the 6th European Summer University*, (pp. 351-361). Vienna: Verlag Holzhausen GmbH / Holzhausen Publishing Ltd.

Hynes, M. E., Hynes, M., Kysilka M. L. & Brumbaugh, D. (1973) Mathematics laboratories: What does research say?. *Educational Leadership, 31*, 271-274.

Jahnke, H. N. (2014) History in mathematics education. A hermeneutic approach. In M. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (pp. 75-88). New York: Springer.

Jahnke, H. N. with Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Silva da Silva, C. M. & Weeks, C. (2000) The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study* (Luminy, Marseille, 1998), chapter 9, (pp. 291-328). Dordrecht / Boston / London: Kluwer.

Jankvist, U. T. (2009) A categorization of the 'Whys' and 'Hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 235-261.

Jankvist, U. T. (2014) On the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics. In M. R. Matthews (Ed.), International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching (Vol. 2, pp. 873-908). Dordrecht: Springer Netherlands.

Jankvist, U. T., Mosvold, R., Fauskanger, J. & Arne Jakobsen, A. (in press) Analysing the use of history of mathematics through MKT. DOI:10.1080/0020739X.2014.990528

Lampert, M. (1990) When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*, 29-63.

Matematica (2003) *La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Ciclo secondario*. Lucca: Liceo Scientifico Statale 'A. Vallisneri'.

Pengelley, D. (2011) Teaching with primary historical sources: should it go mainstream? Can it?. In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 1-8). MAA Notes 78. Washington: The Mathematical Association of America.

http://www.21learn.org/archive/review-the-unschooled-mind-by-howard-gardner/

Appendix 1. Excerpts from Introductio in analysin infinitorum (Euler, 1748)

97. Let the exponential to be considered be a^z where a is a constant and the exponent z is a variable. Since the exponent z stands for all determined numbers, it is clear at least that all positive integers can be substituted for z to give determined values a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, etc. If for z we substitute the negative integers –1, –2, –3, etc., we obtain $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, etc. If $z = 0$, then we have $a^0 = 1$. If we substitute a fraction for z, for instance $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, etc. we obtain the values $\sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{3}{4}}$, etc.

98. The values of the exponential a^z depend primarily on the magnitude of the constant a. If $a = 1$, then we always have $a^z = 1$, no matter what value is given to z. If $a > 1$, then a^z will have a greater value if the value of z is greater than it was originally and as z goes to infinity, so also a^2 increases to infinity. If $z = 0$, then $a^z = 1$; if $z < 0$, then the values of a^z become less than 1 and as z goes to $-\infty$, a^z goes to 0. On the other hand if $a < 1$ but still positive, then the values of a^z decrease when x increases above 0. The exponential increases as z increases in the negative direction. Since when $a < 1$, we have $\frac{1}{a} > 1$, and if we let $\frac{1}{a} = b$, then $a^z = b^{-z}$. For this reason we can examine the case when $a < 1$ from the case when $a > 1$.

99. If $a = 0$, we take a huge jump in the values of a^z. As long as the value of z remains positive, or greater than zero, then we always have $a^z = 0$. If $z = 0$, then $a^0 = 1$. However if z is a negative number, then a^z takes on an infinitely large value; for example, if $z = -3$, then $a^z = 0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$,

which is infinite. Much greater jumps occur if the constant a takes on a negative value, for instance – 2. In this case, when z takes on integral values, a^z takes positive and negative values alternately, as can be seen from the sequence a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^1, a^0, a^l, a^2, a^3, a^4, etc.

$+\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $+\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, + 1, –2, + 4, –8, + 16. Furthermore if the exponent z takes fractional values, then $a^z = (-2)^z$ sometimes has real values and sometimes complex values. For instance a $=\sqrt{-2}$ which is a pure imaginary, while $a^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{1}{3}} = -2^{\frac{1}{3}}$ which is real. If the exponent z is given an irrational value, then a^z may give real or complex values, but this cannot be predicted.

100. After having considered the inconveniences associated with a negative value

for a, we decide that a will be a positive number, indeed greater than 1, since from this case it is easy to investigate the case when a lies between 0 and 1. If we let $y = a^z$, and for z substitute all real numbers, which lie between $-\infty$ and $+\infty$, then y takes all positive real values between 0 and $+\infty$. If z goes to ∞, then y also goes to ∞, if $z = 0$, then $y = 1$ and when z goes to $-\infty$, y goes to 0. On the other hand, for any positive value assigned to y, there is a real value corresponding to z such that $a^z = y$. If a negative value is given to y, there is no corresponding real value for z.

101. If $y = a^z$, then y is a function of z, and the extent to which y depends on z is easily understood from the nature of exponents. Thus whatever value is given to z, the value of y is determined. For instance

$y^2 = a^{2z}$, $y^3 = a^{3z}$ and generally $y^n = a^{nz}$. From this it follows that $\sqrt{y} = a^{\frac{1}{2}z}$, $a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}z}$, and $\frac{1}{y} = a^{-z}$, $\frac{1}{y^2} = a^{-2z}$, $\frac{1}{\sqrt{y}} = a^{-\frac{z}{2}}$, and so forth.

Furthermore, if $v = a^x$, then $vy = a^{x+z}$ and $\frac{v}{y} = a^{x-z}$. A benefit we derive y from these properties is that it is easier to determine the value of z when a value of y is given.

EXAMPLE

If $a = 10$, from arithmetic, which we shall use, the number ten makes it easy to see the values of y when we substitute values for z. We see that $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, and $10^0 = 1$. Likewise $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$, $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01$, $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001$. If we let z have fractional values, by means of root extraction, we can state the values of y. Thus $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3.162277$, etc.

102. Just as, given a number a, for any value of z, we can find the value of y, so, in turn, given a positive value for y, we would like to give a value for z, such that $a^2 = y$. This value of z, insofar as it is viewed as a function of y, it is called the LOGARITHM of y. The discussion about logarithms supposes that there is some fixed constant to be substituted for a, and this number is the base for the logarithm. Having assumed this base, we say the logarithm of y is the exponent in the power a^z such that $a^z = y$. It has been customary to designate the logarithm of y by the symbol $\log y$. If $a^z = y$, then $z = \log y$. From this we understand that the base of the logarithms, although it depends on our choice, still it should be a number greater than 1. Furthermore, it is only of positive numbers that we can represent the logarithm with a real number.

103. Whatever logarithmic base we choose, we always have log 1 = 0, since in the equation $a^z = y$, which corresponds to $z = \log y$, when we let $y = 1$ we have $z = 0$. From this it follows that the logarithm of a number greater than 1 will be positive, depending on the base a. Thus $\log a = 1$, $\log a^2 = 2$, $\log a^3 = 3$, $\log a^4 = 4$, etc. and, after the fact, we know what base has been chosen, that is the number whose logarithm is equal to 1 is the logarithmic base. The logarithm of a positive number less than 1 will be negative. Notice that $\log \frac{1}{a} = -1$, $\log \frac{1}{a^2} = -2$, $\log \frac{1}{a^3} = -3$, etc., but the logarithms of negative numbers will not be real, but complex, as we have already noted.

104. In like manner, if $\log y = z$, then $\log y^2 = 2z$, $\log y^3 = 3z$, etc. and in general $\log y^n = nz$ or $\log y^n = n \log y$, since $z = \log y$. It follows that the logarithm of any power of y is equal to the product of the exponent and the logarithm of y. For example,

$\log \sqrt{y} = \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} \log y$,

$\log \frac{1}{\sqrt{y}} = \log y^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log y$, and so forth. It follows that if we know the logarithms of any number, we can find the logarithms of any power of that number. If we already know the logarithms of two number, for example $\log y = z$ and $\log v = x$, since $y = a^z$ and $v = a^x$, it follows that $\log vy = x + y = \log v + \log y$. Hence, the logarithm of the product of two numbers is equal to the sum of the logarithms of the factors. In like manner, $\log \frac{y}{v} = z - x = \log y - \log v$, that is, the logarithms of a quotient is equal to the logarithm of the numerator diminished by the logarithm of the denominator. These rules can be used to find the logarithms of many numbers from a knowledge of the logarithms of a few.

Leonhard Euler, 1988, *Introduction to Analysis of the Infinite*, New York: Springer; book 1, pp. 75-80.
Translation of: *Intruductio in analysin infinitorum*, 1748.

[In the last paragraph of the original we find "log $vy = x + \underline{y} = \log v + \log y$". The underlined letter has to be read "z"]

Appendix 2. Preface of *Introductio in analysin infinitorum* (Euler, 1748)

PREFACE

Often I have considered the fact that most of the difficulties which block the progress of students trying to learn analysis stem from this: that although they understand little of ordinary algebra, still they attempt this more subtle art. From this it follows not only that they remain on the fringes, but in addition they entertain strange ideas about the concept of the infinite, which they must try to use. Although analysis does not require an exhaustive knowledge of algebra, even of all the algebraic techniques so far discovered, still there are topics whose consideration prepares a student for a deeper understanding. However, in the ordinary treatise on the elements of algebra, these topics are either completely omitted or are treated carelessly. For this reason, I am certain that the material I have gathered in this book is quite sufficient to remedy that defect. I have striven to develop more adequately and clearly than is the usual case those things which are absolutely required for analysis. Moreover, I have also unraveled quite a few knotty problems so that the reader gradually and almost imperceptibly becomes acquainted with the idea of the infinite.

Leonhard Euler, 1988, *Introduction to Analysis of the Infinite*, New York: Springer; book 1, Preface.

Translation of: *Intruductio in analysin infinitorum*, 1748.

Appendix 3. Intermediate test

100.

a) Solve these equations: $10^x = 0.1$ $5^x = 2$ $3^x = -1$

b) Let $a > 1$, then complete the missing parts in the following cases:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \cdots$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \cdots$$

c) In class we have analyzed some properties of a^x when $0 < a < 1$. Euler indeed explains the case a > 1! Analyze it using examples, graphs, equations etc.

101.

a) "… $y^n = a^{nz}$. From this it follows that $\sqrt{y} = a^{\frac{1}{2}z}$ … $\frac{1}{\sqrt{y}} = a^{-\frac{z}{2}}$ …". How do you explain this sentence?

102.

a) How does Euler define *logarithm*? If $a^z = y$, then log y = … (complete the missing part).

b) What does he say about the base of logarithms? Let a the base of logarithm: does Euler consider the case $0 < a < 1$?

103.

a) Explain why log 1 = 0.

b) Positive/negative values of logarithm; logarithm of positive/negative numbers: how does Euler describe this various situations?

104.

Complete the following sentences using words and symbols, as well:

a) The logarithm of a power is equal …

b) The logarithm of a product of two numbers is equal …

c) The logarithm of a quotient is equal …

Appendix 4. Final test

a) *[2 points]* Briefly explain the following sentence using numeric examples, words, a graph and symbols.

> If $a > 1$, then a^z will have a greater value if the value of z is greater than it was originally and as z goes to infinity, so also a^z increases to infinity.

b) *[1 point]* Let $a < 1$, then complete the missing parts in the following cases:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \cdots$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \cdots$$

Explain your choices.

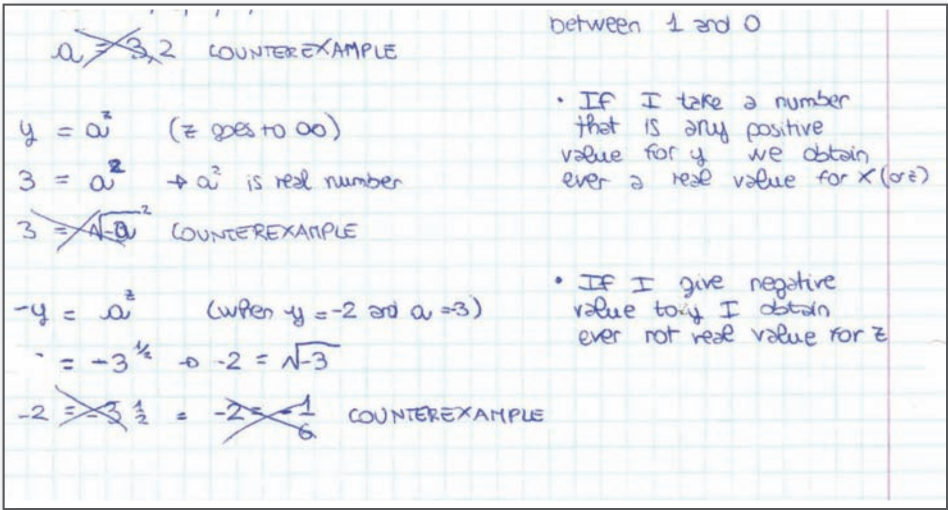
c) *[1 point]* Write the Euler's definition of *logarithm* using: *y*, the exponent *z* and the base *a*.

d) *[1 point]* Explain the following properties of logarithms using symbols and numeric examples: I. logarithm of a power; II. logarithm of a product; III. logarithm of a quotient.

e) *[5 points]* [In Italian in the original. This question doesn't regard Euler's document] Domain, intersection with x/y axis, coordinates of at least three more points, sign and presumed graph of the function:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x^2}$$

Appendix 5. A student's protocols (question 100)



$\cancel{a \neq 3}\ 2$ COUNTEREXAMPLE

$y = a^z$ (z goes to ∞)

$3 = a^2 \rightarrow a^2$ is real number

$3 \cancel{= \sqrt{-a}}^2$ COUNTEREXAMPLE

$-y = a^z$ (when $y = -2$ and $a = 3$)

$= -3^{1/2} \rightarrow -2 = \sqrt{-3}$

$-2 \cancel{= 3}\ \frac{1}{2} = \cancel{-2 = -\frac{1}{6}}$ COUNTEREXAMPLE

between 1 and 0

- If I take a number that is any positive value for y we obtain ever a real value for x (or z)

- If I give negative value to y I obtain ever not real value for z

Appendix 5′. A student's protocols (questions 101, 102)

13.11.2014

INTERPRETATION OF DOCUMENTS

• PROPERTY OF POWERS

$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$

$3^2 \cdot 3^4 = \cancel{9^2 \cdot 9^4}$ COUNTEREXAMPLE

• ~~If~~ I take & two equal numbers with different exponent, the result is a number with the add of two exponents

$3^{-1} = \frac{1}{3}$

$3^{-1} = \cancel{\frac{3}{1}}$ COUNTEREXAMPLE

• If I raise a ~~negative~~ number ~~with~~ to a negative number (for ex. ω or $\frac{1}{3}$) the result is a fraction

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$3^{\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{3}{1}}$ COUNTEREXAMPLE

• If I raise a number to a fraction $\frac{1}{2}$ I obtain the square root of ~~the~~ the number

102) LOGARITHMS

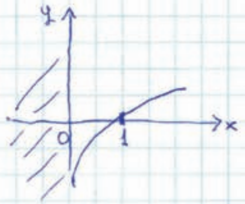
3^{2} → logarithm → $\log_3 x = 2$

$\cancel{\log_3 1 = 3}$ COUNTEREXAMPLE

$a^z = y \Rightarrow z = \log y$

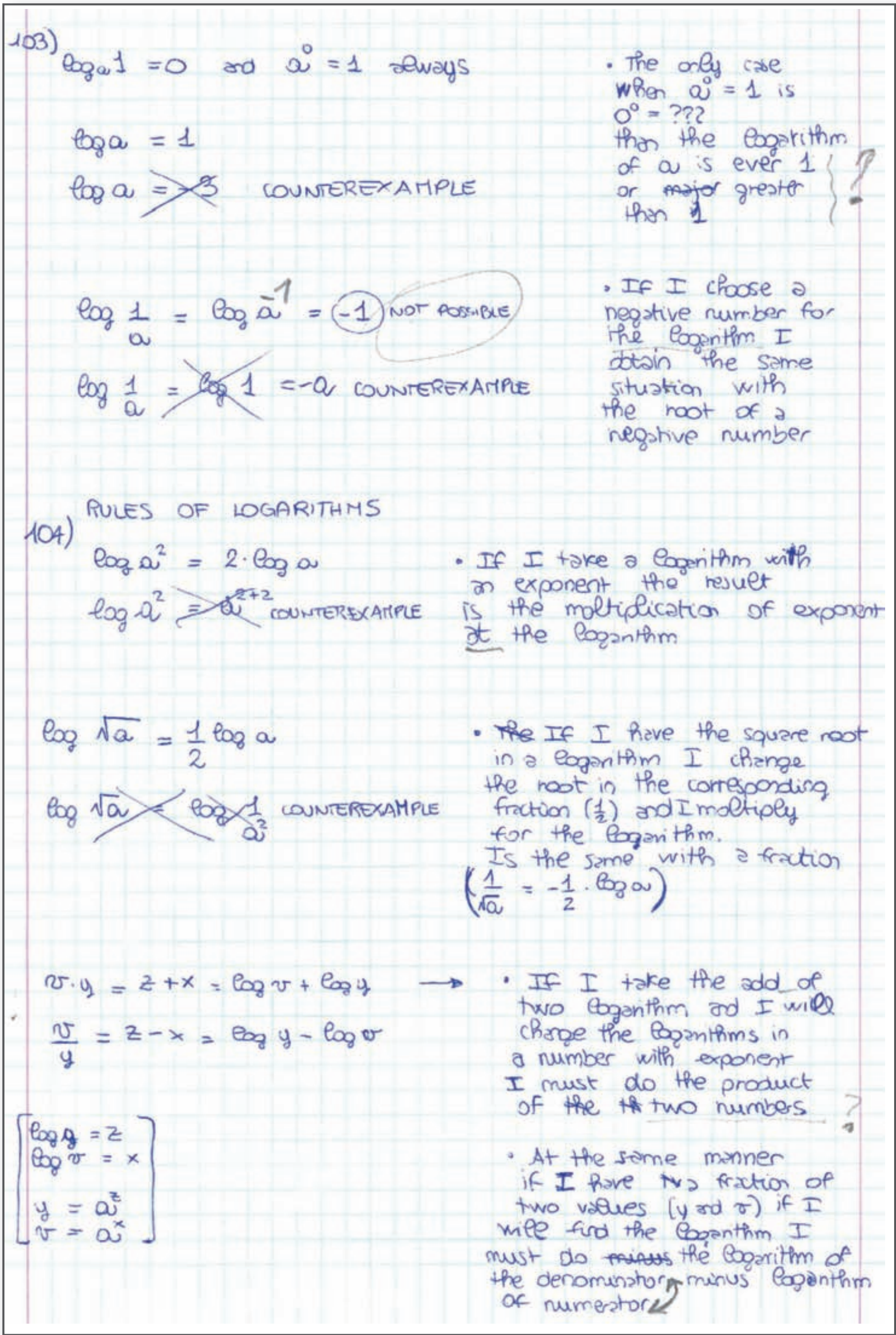
• logarithm is the exponent that we will find

• a^z and $\log y$ ~~is~~ are the "same thing"



• logarithms must and are greater than one if.....

Appendix 5΄΄. A student's protocols (questions 103, 104)



103) $\log_a 1 = 0$ and $a^0 = 1$ always

$\log a = 1$

$\cancel{\log a = 3}$ COUNTEREXAMPLE

• The only case when $a^0 = 1$ is $0^0 = ???$ than the logarithm of a is ever 1 or ~~major~~ greater than 1 ?

$\log \frac{1}{a} = \log a^{-1} = -1$ NOT POSSIBLE

$\log \frac{1}{a} = \cancel{\log 1} = -a$ COUNTEREXAMPLE

• If I choose a negative number for the logarithm I obtain the same situation with the root of a negative number

104) RULES OF LOGARITHMS

$\log a^2 = 2 \cdot \log a$

$\cancel{\log a^2 = a^{2+2}}$ COUNTEREXAMPLE

• If I take a logarithm with an exponent the result is the multiplication of exponent at the logarithm

$\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$

$\cancel{\log \sqrt{a} = \log \frac{1}{a^2}}$ COUNTEREXAMPLE

• ~~The~~ If I have the square root in a logarithm I change the root in the corresponding fraction $(\frac{1}{2})$ and I multiply for the logarithm.
Is the same with a fraction $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2} \cdot \log a\right)$

$v \cdot y = z + x = \log v + \log y$ →

$\frac{v}{y} = z - x = \log y - \log v$

• If I take the add of two logarithm and I will change the logarithms in a number with exponent I must do the product of ~~the~~ ~~th~~ two numbers ?

$\left[\begin{array}{l} \log y = z \\ \log v = x \\ y = a^z \\ v = a^x \end{array}\right]$

• At the same manner if I have two fraction of two values (y and v) if I will find the logarithm I must do ~~minus~~ the logarithm of the denominator minus logarithm of numerator

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΒΟΥΛΗΣΗ*

Μιχάλης Κούρκουλος
Επίκουρος Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε.
Πανεπιστημίου Κρήτης

Κώστας Τζανάκης
Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε.
Πανεπιστημίου Κρήτης

Abstract

In this paper we present our teaching work based on Quetelet's texts on “Moral Statistics" and Free Will aiming to motivate and stimulate relevant discussion with students. The work done allowed them to obtain significant insights into the Free Will debate, statistics and their relation. We provide evidence supporting the position that with adequate teaching design and implementation, it is possible to explore fruitfully existing links among statistics, probability and important philosophical issues, even with novice students in statistics.

Keywords

TTeaching statistics and probability, free will, original historical sources, Quetelet.

Περίληψη

Σ'αυτή την εργασία χρησιμοποιήσαμε κείμενα του Quetelet που αφορούν στην "στατιστική περί τα ηθικά" και την ελεύθερη βούληση για να προκαλέσουμε και να τροφοδοτήσουμε σχετική συζήτηση με τους φοιτητές. Η εργασία που έγινε τους επέτρεψε να αντιληφθούν σημαντικά στοιχεία όσον αφορά στη συζήτηση για την ελεύθερη βούληση, στη Στατιστική και στη σχέση μεταξύ τους. Αυτή η πειραματική διδασκαλία προσφέρει στοιχεία που υποστηρίζουν τη θέση ότι με κατάλληλο διδακτικό σχεδιασμό και εφαρμογή είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν γόνιμα υπάρχοντες δεσμοί μεταξύ Στατιστικής, Πιθανοτήτων και Φιλοσοφίας ακόμη και με φοιτητές που είναι αρχάριοι στη Στατιστική.

Λέξεις κλειδιά

Διδασκαλία στατιστικής και πιθανοτήτων, ελεύθερη βούληση, αυθεντικές ιστορικές πηγές, Quetelet.

0. Εισαγωγή

Μεταξύ των Μαθηματικών και της Φιλοσοφίας υπάρχουν σημαντικοί δεσμοί οι οποίοι διαμορφώθηκαν και λειτούργησαν γόνιμα και προς τις δύο κατευθύνσεις σε όλη τη διάρκεια της ιστορίας τους. Ειδικότερα οι Πιθανότητες και η Στατιστική συνδέονται με τις έννοιες του τυχαίου, της αβεβαιότητας και του εμπειρικού πειστηρίου, έννοιες που έχουν επίσης σημαντικό φιλοσοφικό νόημα. (Όσον αφορά στους ιστορικούς δεσμούς μεταξύ Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Φιλοσοφίας δείτε, για παράδειγμα, Hacking 1975, Porter 1986, Hald 2003, Chandler & Harrison 2012).

Οι σημαντικοί δεσμοί μεταξύ Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Φιλοσοφίας αξιοποιούνται πολύ λίγο στην συνήθη διδασκαλία της στατιστικής και των πιθανοτήτων και ακόμα λιγότερο (αν όχι καθόλου) στην εισαγωγικού επιπέδου διδασκαλία αυτών των αντικειμένων.

Υποστηρίζουμε ότι: (α) Με κατάλληλες δραστηριότητες είναι δυνατόν να αξιοποιήσουμε διδακτικά δεσμούς μεταξύ Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Φιλοσοφίας ακόμη και με φοιτητές αρχάριους στη Στατιστική και τις Πιθανότητες. (β) Η αξιοποίηση τέτοιων δεσμών μπορεί να συνεισφέρει ουσιαστικά στη συζήτηση σημαντικών φιλοσοφικών ζητημάτων με τους φοιτητές. Συχνά τα ζητήματα αυτά συνδέονται με σημαντικές πλευρές της καθημερινής ζωής και είναι μη τετριμμένα για τους φοιτητές. (γ) Κατάλληλες διδακτικές δραστηριότητες που αξιοποιούν τέτοιους δεσμούς στη συζήτηση φιλοσοφικών ζητημάτων μπορούν να προκαλέσουν σε μεγάλο βαθμό το ενδιαφέρον και τη ενεργή συμμετοχή των φοιτητών. (δ) Τέτοιες διδακτικές δραστηριότητες εμπλουτίζουν την εννοιολογική εικόνα (concept image) των φοιτητών όσον αφορά στη Στατιστική, το πως λειτουργεί αλλά και το γιατί είναι σημαντική και ενδιαφέρουσα. Επιπλέον ο συνδυασμός του (δ) και του (γ) είναι δυνατόν να βελτιώσει τη στάση των φοιτητών απέναντι στη Στατιστική.

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα διδακτικής προσέγγισης που υποστηρίζει τα (α) έως (δ) ανωτέρω, το οποίο πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια ενός εισαγωγικού σεμιναρίου στη Στατιστική και τις Πιθανότητες με φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Κρήτης.

1. Χρήση Ιστορικών Πηγών

Ένα βασικό στοιχείο της διδασκαλίας που πραγματοποιήσαμε ήταν η χρήση ιστορικών κειμένων που παρουσιάζουν στατιστική δουλεία και τη συνδέουν με ένα θεμελιώδες φιλοσοφικό ζήτημα, αυτό της ελεύθερης βούλησης. Τα κείμενα που χρησιμοποιήσαμε είναι εργασίες του A. Quetelet που αφορούν στη *Στατιστική περί τα ηθικά*[1] (Statistique Morale) και την ελεύθερη βούληση (κυρίως χρησιμοποιήσαμε την εργασία Quetelet (1847), επίσης χρησιμοποιήσαμε τα Quetelet (1833), Quetelet (1842) βιβλίο τρία, κεφ. 3 και το Quetelet (1848)).

Οι εργασίες του Quetelet που αφορούν στη Στατιστική περί τα ηθικά και την ελεύθερη βούληση καθώς και οι υπόλοιπες εργασίες του στατιστικής μελέτης κοινωνικών φαινομένων είναι μεταξύ των πρωτοπόρων εργασιών όπου χρησιμοποιείται η στατιστική στις κοινωνικές επιστήμες. Έχοντας εκπαίδευση μαθηματικού και αστρονόμου ο Quetelet ήταν εξοικειωμένος με την θεωρία πιθανοτήτων της εποχής του[2], επίσης ήταν εξοικειωμένος με τις μεθόδους παρατήρησης της αστρονομίας, της γεωδαισίας και της μετεωρολογίας καθώς και με τη σχετική θεωρία σφαλμάτων. Κατ' αναλογία με αυτές τις μεθόδους και τη σχετική θεωρία, ο Quetelet θεωρούσε ότι τα ποσοτικά δεδομένα που αφορούν σε κοινωνικά φαινόμενα μπορούν να αναλυθούν σε μέσες τιμές που σχετίζονται με σταθερά αίτια (causes constantes) και σε διακυμάνσεις γύρω από αυτές τις μέσες τιμές που σχετίζονται με τυχαία αίτια (causes accidentelles). Επιπλέον θεωρούσε ότι εάν έχουμε παρατηρήσεις αρκετά μεγάλων πληθυσμών τότε, λόγω του *Νόμου των Μεγάλων Αριθμών* (ΝΜΑ) και του *Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος* (ΚΟΘ), η συσσωρευτική επίδραση των τυχαίων αιτίων στα στατιστικά αποτελέσματα πρακτικά εξουδετερώνεται και έτσι είναι ευκολότερο να εντοπίσουμε κανονικότητες και σχέσεις μεταξύ των μέσων τιμών και των υποκείμενων σταθερών αιτίων. Ο Quetelet πίστευε ότι η χρήση της Στατιστικής στις κοινωνικές επιστήμες μπορεί να συνεισφέρει πολύ σημαντικά στο να αποκαλυφθούν σχέσεις των κοινωνικών φαινομένων (τις οποίες συχνά αποκαλούσε "κοινωνικούς νόμους") και ότι κατ' αυτόν τον τρόπο η Στατιστική θα επιτρέψει μια πολύ βαθύτερη κατανόηση των κοινωνικών φαινομένων. Ο Quetelet κατόρθωσε να βρει σημαντικές σχέσεις σε στατιστικά δεδομένα που αφορούν σε φαινόμενα όπως ο γάμος και το έγκλημα. Ωστόσο, συχνά δέχθηκε κριτικές ότι ήταν υπεραισιόδοξος ως αφορά στις απόψεις του για την γενικότητα και την σταθερότητα των "κοινωνικών νόμων" που είναι δυνατόν να αποκαλυφθούν με την χρήση της στατιστικής. Δέχθηκε δε ακόμη εντονότερη κριτική για το όραμα του ότι μπορεί να οικοδομηθεί ένα συνεκτικό σύστημα τέτοιων νόμων το οποίο ονόμαζε *«Κοινωνική Φυσική»*. Παρ' όλα αυτά, τα πρωτοποριακά και σημαντικά αποτελέσματα των ερευνών του και ο ενθουσιασμός και η ενεργητικότητα του Quetelet ενέπνευσαν επόμενους επιστήμονες και συνεισέφεραν σημαντικά στην υπόθεση της συστηματικής αξιοποίησης της Στατιστικής στις κοινωνικές επιστήμες (Porter 1986 chs.4-6, Stigler 1986 ch.5, Stigler 1999).

Στις εργασίες του που αφορούν στη *Στατιστική περί τα ηθικά*, και δημοσιεύθηκαν από το 1829 ως 1869, ο Quetelet βρήκε ότι από χρόνο σε χρόνο εμφανιζόταν αξιοσημείωτη στατιστική σταθερότητα σε γεγονότα όπως τα εγκλήματα, οι αυτοκτονίες και οι γάμοι, υπό την προϋπόθεση ότι οι κοινωνικές συνθήκες της εξεταζόμενης χώρας ή περιοχής παρέμεναν περίπου σταθερές. Αυτή η σταθερότητα επέτρεπε μια αρκετά ακριβή πρόβλεψη των στατιστικών αποτελεσμάτων για τον επόμενο ή τα επόμενα χρόνια, υπό την προϋπόθεση της διατήρησης της κοινωνικής σταθερότητας. Ωστόσο σε τέτοια γεγονότα η ελεύθερη βούληση του ανθρώπου παίζει σημαντικό ρόλο. Σύμφωνα με απόψεις της εποχής τα γεγονότα στα οποία εμπλέκεται η ανθρώπινη ελεύθερη βούληση θα έπρεπε να διαφεύγουν από κάθε δυνατότητα πρόβλεψης. Ο Quetelet θεωρούσε ότι η σταθερότητα των στατιστικών αποτελεσμάτων και η συνακόλουθη δυνατότητα πρόβλεψης καταδεικνύει περιορισμούς όσον αφορά στις μακροσκοπικές επιδράσεις της ανθρώπινης ελεύθερης βούλησης και θέτει ερωτήματα αναθεώρησης των υπαρχουσών ιδεών για την ελεύθερη βούληση. Τα στατιστικά ευρήματα του Quetelet και η ερμηνεία τους τροφοδότησαν στην εποχή του τη συζήτηση για την ανθρώπινη ελεύθερη βούληση και τους περιορισμούς της. Στα πλαίσια αυτής της συζήτησης ο Quetelet δέχθηκε κριτικές ότι η δουλειά του προωθούσε θέσεις συγγενείς με το φαταλισμό και τον υλισμό. Προκειμένου να αντικρούσει τις κριτικές αυτές επεξεργάσθηκε περαιτέρω την επιχειρηματολογία του και προσέθεσε νέα στατιστικά ευρήματα για να την υποστηρίξει. (Lottin 1911, Seneta 2003, Porter 1986 ch.6).

Τα κείμενα του Quetelet με τα οποία δουλέψαμε, επιπλέον του ενδιαφέροντος τους όσον αφορά στη σύνδεση Στατιστικής και Φιλοσοφίας, παρουσιάζουν και ορισμένα σημαντικά παιδαγωγικά πλεονεκτήματα: (i) η μαθηματική επεξεργασία των στατιστικών δεδομένων είναι απλή σε αυτές τις εργασίες και ως εκ τούτου μπορούν να συζητηθούν με φοιτητές αρχάριους στη Στατιστική, (ii) η ερμηνεία των στατιστικών αποτελεσμάτων εξηγείται λεπτομερώς και συχνά συνοδεύεται από διαφωτιστικά παραδείγματα, και (iii) τα κείμενα αυτών των εργασιών αντανακλούν το πάθος και τον ενθουσιασμό που συνήθως συνοδεύει τις νέες και σημαντικές ανακαλύψεις.

2. Περίγραμμα του Μαθήματος

Η διδακτική μας προσέγγιση πραγματοποιήθηκε σε ένα εισαγωγικού επιπέδου σεμινάριο Στατιστικής και Πιθανοτήτων στο οποίο συμμετείχαν 29 τριτοετείς και τεταρτοετείς φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Κρήτης (26 κορίτσια 3 αγόρια)[3]. Η μόνη προηγούμενη εκπαίδευση που είχαν οι φοιτητές στη Στατιστική και τις Πιθανότητες ήταν τα στοιχεία πιθανοτήτων και περιγραφικής στατιστικής που είχαν διδαχθεί στο Λύκειο. Έτσι, οι τρεις πρώτες εβδομάδες αφιερώθηκαν στην επανάληψη και συμπλήρωση αυτών των γνώσεων.

Από την τέταρτη έως την όγδοη εβδομάδα συζητήσαμε με τους φοιτητές εργασία του Quetelet που αναφέρεται σε στατιστικά στοιχεία για τους γάμους (Quetelet 1847). Στην εργασία αυτή ο Quetelet παρουσιάζει τις θέσεις του όσον αφορά στη σύνδεση ανάμεσα στην παρατηρούμενη σταθερότητα των στατιστικών στοιχείων και στους περιορισμούς της ελεύθερης βούλησης των ανθρώπων. Αυτό ήταν το πρώτο μέρος της συζήτησης στην τάξη. Για το δεύτερο μέρος ο διδάσκων ζήτησε στους φοιτητές να διαβάσουν όσον αφορά σε θέσεις και ιδέες διαφορετικών φιλοσόφων για την ελεύθερη βούληση και να παρουσιάσουν στην τάξη στοιχεία από τη μελέτη τους. Τα στοιχεία αυτά συζητήθηκαν σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους και εμπλούτισαν σημαντικά το δεύτερο μέρος της συζήτησης[4].

Το δεύτερο μέρος της συζήτησης διήρκεσε από την όγδοη εβδομάδα έως το τέλος των μαθημάτων (12η εβδομάδα). Το δεύτερο μέρος της συζήτησης διήρκεσε από την όγδοη εβδομάδα έως το τέλος των μαθημάτων (12η εβδομάδα).

Επιπλέον, ο διδάσκων ζήτησε κάθε φοιτητής να υποβάλλει μια γραπτή εργασία, τουλάχιστον 6000 λέξεων, στην οποία έπρεπε να παρουσιάζει και να σχολιάζει στοιχεία από τη συζήτηση στην τάξη καθώς και στοιχεία από την προσωπική του μελέτη όσον αφορά στις θέσεις των φιλοσόφων για την ελεύθερη βούληση. Οι εργασίες έπρεπε να παραδοθούν το αργότερο ένα μήνα μετά το τέλος των μαθημάτων στην τάξη.

Μετά το τέλος των μαθημάτων στην τάξη ο διδάσκων πραγματοποίησε ατομική συνέντευξη με κάθε φοιτητή. Οι συνεντεύξεις αφορούσαν στο τι βρήκαν ενδιαφέρον (ή όχι) από τα θέματα που συζητήθηκαν στην τάξη, καθώς και τα κίνητρα και τα συναισθήματα τους όσον αφορά στη δουλειά που έκαναν στα πλαίσια του μαθήματος.

Καθώς το πρώτο μέρος της συζήτησης στην τάξη εμπλέκει περισσότερη δουλειά Στατιστικής και συγχρόνως είναι ουσιώδες προκειμένου ο αναγνώστης να κατανοήσει τη διδακτική μας προσέγγιση, σε αυτή την εργασία παρουσιάζουμε αναλυτικότερα στοιχεία από αυτό το πρώτο μέρος, ενώ στοιχεία από το δεύτερο μέρος παρουσιάζονται συνοπτικότερα λόγω των περιορισμών ως προς το μέγεθος της εργασίας.

3. Στοιχεία Υποδομής

Όπως ήδη προαναφέραμε η μόνη προηγούμενη εκπαίδευση των φοιτητών στη Στατιστική και τις Πιθανότητες ήταν τα στοιχεία πιθανοτήτων και περιγραφικής στατιστικής που είχαν διδαχθεί στο Λύκειο[5]. Οι τρεις πρώτες εβδομάδες του μαθήματος αφιερώθηκαν στην επανάληψη και συμπλήρωση αυτών των γνώσεων (για τη διάρκεια των μαθημάτων δείτε τη σημείωση 3). Συζητήσαμε με τους φοιτητές όσον αφορά στην οργάνωση και αναπαράσταση (γραφικά και με πίνακες) στατιστικών δεδομένων, τα μέτρα κεντρικής τάσης (επικρατούσα τιμή, μέσος όρος, διάμεσος), τα μέτρα μεταβλητότητας (εύρος, ενδοτεταρτημοριακό εύρος, μέση απόλυτη απόκλιση και τυπική απόκλιση), το σχήμα και τη λοξότητα μίας κατανομής. Όσον αφορά στις πιθανότητες συζητήσαμε για τον προσθετικό και τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων, την διωνυμική κατανομή καθώς και παραδείγματα εφαρμογών της (π.χ. παιχνίδια τύχης, φύλλο νεογέννητων, απλά μοντέλα ασφαλειών), τον ΝΜΑ και την κανονική κατανομή μαζί με κατάλληλα παραδείγματα.

4. Πρώτο Μέρος της Συζήτησης στην Τάξη

4.1. Εισαγωγή του προβλήματος

Ο διδάσκων, την τέταρτη εβδομάδα, παρουσίασε στοιχεία για την σημαντική επιστημονική εξέλιξη που συντελέσθηκε τον 19ο αιώνα και την αντίστοιχη διανοητική ατμόσφαιρα και ενθουσιασμό αυτής της περιόδου. Σ' αυτό το πλαίσιο εξήγησε το μεγάλο ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας για τη Στατιστική και τις Πιθανότητες, των οποίων βασικές επιτυχημένες εφαρμογές πραγματοποιήθηκαν στις αρχές του αιώνα στην αστρονομία και τη γεωδαισία, ενώ αργότερα, η χρήση τους επεκτάθηκε στις άλλες φυσικές επιστήμες καθώς και στις κοινωνικές επιστήμες. Στη συνέχεια παρουσίασε στοιχεία για την εκπαίδευση, την παιδεία και το έργο του Quetelet. Παρουσίασε στοιχεία για τις απόψεις και τις ιδέες του όσον αφορά στις δυνατότητες που προσφέρει η χρήση της Στατιστικής στη μελέτη των κοινωνικών φαινομένων και επισήμανε τον πρωτοποριακό χαρακτήρα των εργασιών του στις κοινωνικές επιστήμες. Επιπλέον, συζήτησε με τους φοιτητές την έννοια των τυχαίων και των όχι-τυχαίων αιτίων μεταβλητότητας σε συνδυασμό με κατάλληλα παραδείγματα , η έννοια αυτή είναι έννοια-κλειδί στην εξέλιξη της στατιστικής του 19ου αιώνα αλλά και στη θεώρηση του Quetelet για τη χρήση της στατιστικής στις κοινωνικές επιστήμες (Stigler 1986).

Στη συνέχεια ο καθηγητής παρουσίασε στους φοιτητές την εισαγωγή της εργασίας του Quetelet του 1847[7]. Εκεί ο Quetelet επισημαίνει ότι η στατιστική περί τα ηθικά έχει δεχθεί την κριτική ότι επιχειρεί να μετρήσει τα πάθη και τις κλίσεις των ανθρώπων, πράγμα όχι μόνο αδύνατο αλλά και παράλογο, και ότι αυτό είναι μια προσπάθεια "...να αλυσοδεθεί το μέλλον (των ανθρώπων) σε μια άκαμπτη μαθηματική φόρμουλα..." (Quetelet 1847, σ.135). Γι’ αυτούς που μελετούν μόνο ατομικές περιπτώσεις -γράφει- η ελεύθερη βούληση δρα κατά τρόπο τόσο ιδιότροπο ακατάστατο και απρόβλεπτο που φαίνεται παράλογο να υποθέσουμε ότι υπάρχουν κανονικότητες και νόμοι στα γεγονότα που συντελούνται υπό την επίδραση της. Ωστόσο, επισημαίνει, στις παρατηρήσεις μεγάλων πληθυσμών η επίδραση των ιδιαιτεροτήτων των ατομικών ελεύθερων βουλήσεων εξαφανίζεται και κυριαρχούν οι γενικές τάσεις εξαιτίας των οποίων η κοινωνία υπάρχει και διαρκεί. Όταν παρατηρούμε ένα μεγάλο πληθυσμό οι επιδράσεις των ιδιαιτεροτήτων των ατομικών ελεύθερων βουλήσεων στα στατιστικά στοιχεία αλληλοεξουδετερώνονται και εμπίπτουν στην κατηγορία των επιδράσεων που οφείλονται σε καθαρά τυχαία αίτια[8]. Αυτή η θεμελιώδης ιδιότητα της ανθρώπινης ελεύθερης βούλησης επιτρέπει στη στατιστική περί τα ηθικά να παρέχει χρήσιμα αποτελέσματα. Ο Quetelet τονίζει ότι αυτή η ιδιότητα είναι αξιοσημείωτη και από φιλοσοφική άποψη, καθώς μας πληροφορεί ότι η επίδραση των ατομικών ιδιαιτεροτήτων της δράσης του ανθρώπου βρίσκεται περιορισμένη σε μια σφαίρα τέτοια ώστε οι νόμοι της φύσης παραμένουν ανεπηρέαστοι. Επιπλέον δείχνει ότι νόμοι διατήρησης μπορούν να υπάρχουν στον πνευματικό κόσμο (monde moral) όπως υπάρχουν και στο φυσικό κόσμο (Quetelet 1847, σ.136). Ο Quetelet σημειώνει ότι ένα σημαντικό ερώτημα είναι το να αποδειχθεί αυτή η θεμελιώδης ιδιότητα της ανθρώπινης ελεύθερης βούλησης και ότι σε προηγούμενες εργασίες του είχε καταδείξει ότι η εξουδετέρωση των επιδράσεων των ιδιαιτεροτήτων των ατομικών ελεύθερων βουλήσεων παρατηρείται πράγματι όταν τα εξεταζόμενα στοιχεία αφορούν μια χρονική περίοδο αρκετά μικρή ώστε οι κοινωνικές συνθήκες να μένουν βασικά αμετάβλητες. Ως προς αυτό αναφέρει τις εργασίες του για τις εγκληματικές πράξεις, όπου διαπιστώνεται αξιοσημείωτη σταθερότητα των σχετικών στατιστικών στοιχείων από χρόνο σε χρόνο, και σημειώνει ότι το ίδιο ερώτημα εξετάζεται στην παρούσα εργασία για το φαινόμενο του γάμου με στατιστικά στοιχεία από το Βέλγιο.

4.2. Συζητώντας για τη μεταβλητότητα και τις επιδράσεις των ιδιαιτεροτήτων των ατομικών ελεύθερων βουλήσεων

Στη συνέχεια, ο Quetelet παρουσιάζει παραδείγματα στατιστικών δεδομένων για να υποστηρίξει ότι υπάρχει αξιοσημείωτη σταθερότητα των στατιστικών στοιχείων για τους γάμους την εξεταζόμενη περίοδο, 1841-1845, η οποία είναι μια περίοδο κοινωνικής σταθερότητας για το Βέλγιο. Ο διδάσκων ζήτησε από τους φοιτητές να εξετάσουν αυτά τα στατιστικά δεδομένα και να διατυπώσουν τη γνώμη και τις απόψεις τους ως προς την σταθερότητα τους.

Ο Quetelet παρουσιάζει τους ετησίους αριθμούς γάμων χήρων με χήρες, που ήταν για τις πόλεις 231, 221, 224, 244, 226 και για τα χωριά 498, 474, 492, 482, 514. Οι φοιτητές υπολόγισαν το Μέσο Όρο (Μ.Ο.), τις διαφορές μέγιστο-Μ.Ο. και Μ.Ο.-ελάχιστο, το εύρος, και την Μέση Απόλυτη Απόκλιση (Μ.Α.Α.) , πρώτα για τις πόλεις και κατόπιν για τα χωριά. Στη συνέχεια υπολόγισαν αυτά τα μέτρα μεταβλητότητας ως κλάσματα (ποσοστά) των αντίστοιχων Μ.Ο. Έτσι βρήκαν ότι, για τις πόλεις η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή διαφέρουν από το Μ.Ο. 6,5% και 3,6% του Μ.Ο., ενώ για τα χωριά οι αντίστοιχες τιμές είναι 4,5% και 3,7%, και ότι η Μ.Α.Α. είναι 2,9% του Μ.Ο. για τις πόλεις και 2,3% για τα χωριά. Έχοντας αυτά τα αποτελέσματα οι φοιτητές συμφώνησαν ότι ο Quetelet είχε δίκιο να θεωρεί ότι υπάρχει μικρή μεταβλητότητα και άρα αξιοσημείωτη σταθερότητα στους ετήσιους αριθμούς αυτής της κατηγορίας γάμων.

Μετά οι φοιτητές εργάστηκαν με το δεύτερο παράδειγμα του Quetelet που αφορά στους ετήσιους αριθμούς ανδρών και γυναικών ηλικίας 25 έως 30 ετών που παντρεύτηκαν στις πόλεις. Για τους άνδρες αυτοί οι αριθμοί ήταν 2681, 2655, 2516, 2698, 2698 και για τις γυναίκες ήταν 2119, 2012, 1981, 2120, 2133. Βρήκαν ότι για τους άνδρες οι διαφορές μέγιστο-Μ.Ο. και Μ.Ο.-ελάχιστο και η Μ.Α.Α. είναι 1,8%, 5% και 2% του Μ.Ο., και ότι για τις γυναίκες οι αντίστοιχες τιμές είναι 2,9%, 4,4% and 3%. Και γι' αυτά τα αποτελέσματα οι φοιτητές εξέφρασαν τη γνώμη ότι δείχνουν μικρή μεταβλητότητα και άρα αξιοσημείωτη ετήσια σταθερότητα.

Στην συνέχεια εργάστηκαν με άλλα παραδείγματα στατιστικών δεδομένων που προέρχονται από τον πίνακα του Quetelet (σελ. 143) όπου παρουσιάζει την κατανομή των γάμων ανά χρόνο σύμφωνα με την ηλικιακή κατηγορία του γαμπρού και της νύφης.

Στις τέσσερεις πολυπληθέστερες κατηγορίες (με μέσους όρους μεταξύ 2495 και

12752) τα μέτρα μεταβλητότητας διαιρούμενα δια των αντίστοιχων Μ.Ο. έδωσαν ποσοστιαίες τιμές που δεν ήταν μακριά από αυτές των προηγούμενων παραδειγμάτων[10]. Όσον αφορά στους συνολικούς ετήσιους αριθμούς γάμους τα αντίστοιχα ποσοστά δεν απείχαν πολύ από αυτά των παραπάνω τεσσάρων κατηγοριών[11]. Ωστόσο στις μικρότερες κατηγορίες υπήρχαν περιπτώσεις όπου τα αντίστοιχα ποσοστά ήταν μεγαλύτερα από τα προηγούμενα. Ιδιαίτερα έντονο ήταν αυτό το φαινόμενο σε κατηγορίες με Μ.Ο. μικρότερο του 150. Ως προς αυτό ο Quetelet επισημαίνει ότι στις μικρές κατηγορίες είναι πιο πιθανό τυχαία αίτια να επιτύχουν να καταστρέψουν τη σταθερότητα και έτσι να εμφανίζεται μεγαλύτερη (σχετική) μεταβλητότητα.

Στη συζήτηση που ακολούθησε οι φοιτητές εξέφρασαν την γνώμη ότι τα στατιστικά που είχαν εξετάσει ήταν συμβατά με την ερμηνεία του Quetelet ότι σε συνθήκες κοινωνικής σταθερότητας οι μεταβολές της ελεύθερης βούλησης των ατόμων προκαλούν μικρές μεταβολές στους ετήσιους αριθμούς γάμων των πολυπληθών κατηγοριών του πληθυσμού και έτσι παρατηρείται αξιοσημείωτη σταθερότητα σ' αυτά τα στατιστικά στοιχεία.

Στη συνέχεια ο διδάσκων έθεσε την παρακάτω ερώτηση: Ακόμη και σε περίοδο κοινωνικής σταθερότητα υπάρχουν πολλοί λόγοι, οικονομικοί, κοινωνικοί, συναισθηματικοί, εξαιτίας των οποίων από χρόνο σε χρόνο άνθρωποι μπορεί να αλλάξουν τη βούληση και τη διάθεση τους να παντρευτούν. Τί νομίζετε ότι συνέβη ώστε, παρ' όλους αυτούς του λόγους αλλαγής, οι ετήσιοι αριθμοί γάμων στη χώρα να μην αλλάζουν ουσιαστικά; Οι φοιτητές υπέθεσαν την ύπαρξη διαδικασιών αντιστάθμισης και πρότειναν σχετικά παραδείγματα όπως:

- Σε μία χώρα κατά τη διάρκεια μιας χρονιάς κάποιοι άνθρωποι χάνουν τη δουλειά τους πράγμα που μπορεί να επηρεάσει τη θέληση τους να παντρευτούν, ωστόσο, σε συνθήκες κοινωνικής σταθερότητας, ένας περίπου ίσος αριθμός ανθρώπων βρίσκει δουλειά, πράγμα που επηρεάζει τη θέληση τους να παντρευτούν προς την αντίθετη κατεύθυνση. Έτσι, ενώ και στις δύο ομάδες υπάρχουν αλλαγές όσον αφορά στη θέληση των ατόμων να παντρευτούν, ο ετήσιος αριθμός των γάμων μπορεί πολύ εύκολα να μείνει πρακτικά αμετάβλητος.
- Σε μια μεγάλη χώρα που βρίσκεται σε συνθήκες κοινωνικής σταθερότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε χρόνο περίπου ο ίδιος αριθμός άγαμων ανθρώπων βρίσκεται σε περίοδο πένθους λόγω θανάτου των γονιών τους, αλλά δεν είναι τα ίδια άτομα κάθε χρόνο. Κάθε χρόνο κάποιοι άνθρωποι μπαίνουν σε περίοδο πένθους αλλά περίπου ο ίδιος αριθμός βγαίνει από περίοδο πένθους. Όσον αφορά στη βούλησή τους να παντρευτούν οι πρώτοι επηρεάζονται αρνητικά, ενώ οι δεύτεροι επηρεάζονται θετικά. Έτσι, ο ετήσιος αριθμός γάμος στη χώρα πολύ πιθανόν θα μείνει ανεπηρέαστος από όλες αυτές τις αλλαγές.

Ο διδάσκων επεσήμανε ότι, σε σταθερές κοινωνικές συνθήκες, αυτές οι διαδικασίες αντιστάθμισης δημιουργούν μεταβλητότητα του είδους που ο Quetelet θεωρούσε ως τυχαία μεταβλητότητα. Επίσης συζήτησε με τους φοιτητές για την τυχαία μεταβλητότητα και το ότι διαδικασίες αντιστάθμισης όπως οι προαναφερθείσες λειτουργούν καλλίτερα ως προς τα στατιστικά αποτελέσματα μεγάλων κατηγοριών ή ομάδων του πληθυσμού (π.χ. μια μεγάλη πόλη) , παρά για μικρές κατηγορίες ή ομάδες (π.χ. ένα χωριό). Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχουν τυχαία αίτια μεταβλητότητας τα οποία μπορούν εύκολα να δημιουργήσουν στις μικρές ομάδες αξιόλογες μεταβολές συγκριτικά με τις αντίστοιχες μέσες τιμές, ενώ δεν είναι πιθανό να συμβεί αυτό σε μεγάλες ομάδες του πληθυσμού. Και εδώ οι φοιτητές πρότειναν κατάλληλα παραδείγματα όπως:

- Σε ένα χωριό που γίνονται κατά μέσο όρο 10 γάμοι το χρόνο, χωρισμοί αρραβωνιασμένων ή το να χάσουν τη δουλειά τους κάποια άτομα εύκολα, μπορεί να προκαλέσουν μείωση 10% ή 20% του αριθμού των γάμων από τον ένα χρόνο στον άλλο. Σε μία μεγάλη πόλη αυτό δεν μπορεί να συμβεί. Σε μία μεγάλη πόλη, και ιδιαίτερα σε συνθήκες κοινωνικής σταθερότητας, ο αριθμός των χωρισμών αρραβωνιασμένων ή αριθμός αυτών που χάνουν τη δουλειά τους δεν αλλάζει πολύ από χρόνο σε χρόνο...

Σχόλιο: Η προηγούμενη συζήτηση επέτρεψε στους φοιτητές να διαμορφώσουν μια καλλίτερη ποιοτική κατανόηση όσον αφορά στην τυχαία μεταβλητότητα και το πώς λειτουργεί σε κοινωνικά φαινόμενα, ιδιαίτερα δε, όσον αφορά στην επίδραση της στα στατιστικά στοιχεία μεγάλων και μικρών ομάδων του πληθυσμού. Επίσης ο διδάσκων επεσήμανε τα κοινά στοιχεία μεταξύ της τυχαίας μεταβλητότητας και της μεταβλητότητας των τυχαίων δειγμάτων που υπακούει στον Ν.Μ.Α. Επιπλέον, η συζήτηση αυτή επέτρεψε στους οι φοιτητές να κατανοήσουν καλλίτερα την θέση του Quetelet ότι σε συνθήκες κοινωνικής σταθερότητας οι μεταβολές μέσα στο χρόνο των ατομικών ελεύθερων βουλήσεων δεν προκαλούν αξιόλογες μεταβολές στα στατιστικά στοιχεία μεγάλων πληθυσμών.

Στη συνέχεια ο διδάσκων ανέφερε ότι ο Quetelet με την επισήμανση του ότι η περίοδος 1841-1845 ήταν περίοδος κοινωνικής σταθερότητας για το Βέλγιο δεν εννοεί ότι ήταν μια περίοδος απόλυτης κοινωνικής σταθερότητας αλλά μόνον ότι οι κοινωνικές συνθήκες παρέμειναν σε γενικές γραμμές σταθερές. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί στη διάρκεια αυτής της περιόδου μερικοί σημαντικοί κοινωνικοί παράγοντες να εμφάνισαν μικρές, αλλά όχι ασήμαντες, μεταβολές χωρίς ωστόσο να διαταράσσεται η συνολική εικόνα κοινωνικής σταθερότητας. Τέτοιες αλλαγές μπορεί να προκάλεσαν μικρές, αλλά όχι τυχαίες, μεταβολές στα στατιστικά των γάμων κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Έτσι μέρος της παρατηρούμενης μεταβλητότητας μπορεί να ήταν όχι-τυχαίο. Επιπλέον ο διδάσκων, με τη βοήθεια κατάλληλων παραδειγμάτων, επεσήμανε ότι ο Ν.Μ.Α. δεν ισχύει για την όχι-τυχαία μεταβλητότητα, η οποία συχνά δεν εξαρτάται από το μέγεθος του παρατηρούμενου πληθυσμού.

Στη συνέχεια ζήτησε από τους φοιτητές να ψάξουν αν εμφανίζονται στα στατιστικά δεδομένα ενδείξεις όχι-τυχαίας μεταβλητότητας. Οι φοιτητές, παρά τις περιορισμένες γνώσεις όσον αφορά στη θεωρία πιθανοτήτων, κατάφεραν να κάνουν ορισμένες αξιόλογες σχετικές παρατηρήσεις. Συγκεκριμένα: (i) Παρατήρησαν ότι το 1841 εμφανίζονται τρεις από τις τέσσερις μέγιστες τιμές των τεσσάρων μεγάλων κατηγοριών που εξετάσθηκαν προηγούμενα. Οι φοιτητές θεώρησαν ότι αυτό είναι ένα ασυνήθιστο αποτέλεσμα εάν το έτος μέγιστης τιμής κάθε κατηγορίας καθορίστηκε τυχαία μεταξύ των πέντε ετών της εξεταζόμενης περιόδου. (ii) Ο συνολικός πληθυσμός συνιστά μια κατηγορία πολύ μεγαλύτερη από τις τέσσερεις μεγάλες κατηγορίες που εξετάσθηκαν προηγούμενα, έτσι οι φοιτητές σκέφθηκαν ότι εάν όλη η παρατηρούμενη μεταβλητότητα είναι τυχαία τότε είναι αναμενόμενο τα μέτρα σχετικής μεταβλητότητας του συνολικού πληθυσμού να είναι αρκετά μικρότερα από αυτά των τεσσάρων μεγάλων κατηγοριών. Ωστόσο οι φοιτητές παρατήρησαν ότι ο λόγος της διαφοράς Μ.Ο.-ελάχιστο προς το Μ.Ο. δεν μειώθηκε όπως ανέμεναν (δες σημειώσεις 10 & 11) και ότι αυτό θα μπορούσε να είναι μια ακόμη ένδειξη ύπαρξης όχι-τυχαίας μεταβλητότητας[12].

4.3. Η τάση των ατόμων να ακολουθούν τις κοινωνικές συνήθειες και απαιτήσεις

Ο Quetelet γράφει ότι οι άνθρωποι έχουν ισχυρή τάση να ακολουθούν τις συνήθειες της κοινωνίας στην οποία ανήκουν και να προσαρμόζονται στις απαιτήσεις της και ότι αυτό είναι ένα βασικό στοιχείο που επηρεάζει τη βούληση τους γενικά, αλλά και για το γάμο ειδικότερα, και παίζει καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση των σχετικών στατιστικών[13]. Αυτό είναι το δεύτερο βασικό στοιχείο που προτείνει ο Quetelet για την ερμηνεία των στατιστικών αποτελεσμάτων σε συνδυασμό με την ανθρώπινη βούληση. Επιπλέον, παρουσιάζει και σχολιάζει εμπειρικά στοιχεία ως υποστηρικτικά παραδείγματα της θέσης του, όπως: (i) Η επικρατούσα τιμή της ηλικίας που έχουν οι νύφες διαφέρει έως και δύο χρόνια από περιοχή σε περιοχή. Αυτή η διαφορά, γράφει, οφείλεται στη διαφορά των εθίμων των διαφορετικών περιοχών και όχι στην ελεύθερη βούληση των ατόμων. (ii) Ο αριθμός των γάμων νέων με ηλικιωμένους εμφανίζεται μικρός αλλά αρκετά σταθερός κάθε χρόνο. Ο Quetelet σχολιάζει ότι ένας άνδρας λιγότερο των 30 ετών που παντρεύτηκε μια γυναίκα με ηλικία άνω των 60 δεν το έκανε εξαιτίας της μοίρας ή από τυφλό πάθος, αλλά ήταν σε θέση να σκεφθεί και να χρησιμοποιήσει πλήρως την ελεύθερη βούληση του. Ωστόσο τελικά αποφάσισε να πληρώσει την οφειλή του για να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις της υπάρχουσας κοινωνικής οργάνωσης. Αυτό το είδος οφειλής, επισημαίνει, πληρώνεται κάθε χρόνο με μεγαλύτερη κανονικότητα από ότι οι φόροι του κράτους.

Ο διδάσκων παρουσίασε τη θέση και τα παραδείγματα του Quetelet όσον αφορά στην επίδραση κοινωνικών παραγόντων στη βούληση των ανθρώπων ως προς το γάμο και στη συνέχεια ζήτησε από τους φοιτητές να εκφράσουν τις απόψεις και τις σκέψεις τους γι' αυτό το θέμα. Οι φοιτητές εντόπισαν μια μεγάλη ποικιλία τέτοιων παραγόντων. Επιπλέον, με βάση της γνώσεις και τις εμπειρίες τους παρουσίασαν ένα σημαντικό αριθμό παραδειγμάτων για να δείξουν την επίδραση αυτών των παραγόντων. Οι παράγοντες που εντόπισαν μπορούν να ταξινομηθούν ως παράγοντες που αφορούν, στο οικογενειακό περιβάλλον, την οικονομική κατάσταση, το κοινωνικό περιβάλλον και ιδιαίτερα τη γνώμη των άλλων, και την εκπαίδευση. Οι φοιτητές επεσήμαναν ότι οι παράγοντες αυτοί πολύ συχνά επιδρούν ισχυρά και σύμφωνα με τις κοινωνικές συνήθειες και τα ήθη, και υπογράμμισαν τη σημασία της εκπαίδευσης για την καλλιέργεια της ικανότητας κριτικής θεώρησης και αξιολόγησης αυτών των επιδράσεων. Πολλοί φοιτητές περιέγραψαν την επίδραση των κοινωνικών παραγόντων με όρους πίεσης στην οποία η βούληση των ανθρώπων υποχωρεί ή υποτάσσεται. Άλλοι φοιτητές αντέδρασαν σ' αυτό λέγοντας ότι η ελεύθερη βούληση πολλών ανθρώπων βρίσκεται σε συμφωνία με τις κοινωνικές συνήθειες και τα ήθη, έτσι σ' αυτές τις περιπτώσεις δεν υπάρχει θέμα υποχώρησης ή υποταγής. Ωστόσο ορισμένοι επεσήμαναν ότι οι άνθρωποι από πολύ μικρή ηλικία δέχονται ισχυρές επιρροές από την οικογένεια την εκπαίδευση και το κοινωνικό περιβάλλον, οι οποίες διαμορφώνουν στερεότυπα και πεποιθήσεις που καθορίζουν την μελλοντική τους βούληση σε θέματα όπως ο γάμος. Έτσι ακόμη και αν η βούληση τους βρίσκεται σε συμφωνία με τις κοινωνικές συνήθειες και τα ήθη είναι αμφίβολο ότι η βούληση αυτή είναι ελεύθερη βούληση. Αυτές οι παρατηρήσεις οδήγησαν την παρακάτω σημαντική ερώτηση: Σε ποιο βαθμό ένας άνθρωπος είναι δημιουργός και κύριος της θέλησης του;

Αυτή η ερώτηση τέθηκε την έκτη εβδομάδα αλλά συζητήθηκε κυρίως την έβδομη. Πολλοί φοιτητές εξέφρασαν τη γνώμη ότι ένα μεγάλο μέρος των ιδεών και των πεποιθήσεων που καθορίζουν τη βούληση των ανθρώπων καθορίζονται από κοινωνικούς παράγοντες, αλλά υπάρχει και ένα σημαντικό μέρος που είναι δικό τους δημιούργημα. Άλλοι είπαν ότι ακόμα και εξετάζοντας προσωπικές τους κρίσιμες αποφάσεις[14] δεν μπόρεσαν να εντοπίσουν καμία σημαντική ιδέα ή πεποίθηση που να είναι αποκλειστικά δική τους. Είπαν ότι βρήκαν ιδέες και σκέψεις που αρχικά θεώρησαν ως δικές τους, αλλά μετά από βαθύτερη εξέταση βρήκαν ότι αυτές ήταν ισχυρά επηρεασμένες από προϋπάρχουσες ιδέες και πεποιθήσεις, οι οποίες με τη σειρά τους διαμορφώθηκαν υπό την ισχυρή επίδραση της οικογένειας, της εκπαίδευσης και του κοινωνικού περιβάλλοντος.

Οι φοιτητές συμφώνησαν ότι αυτό το θέμα είναι δύσκολο να διερευνηθεί, αλλά ότι είναι σημαντικό να συνεχίσουν την προσπάθεια γιατί η όποια πρόοδος μπορεί να είναι σημαντική για να αναθεωρηθούν ενδεχόμενες εσφαλμένες ιδέες όσον αφορά στο εάν και κατά πόσο οι άνθρωποι είναι κύριοι της βούλησης τους.

5. Δεύτερο Μέρος της Συζήτησης στην Τάξη

Την έκτη εβδομάδα ο διδάσκων είπε στους φοιτητές ότι θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουν όσον αφορά στις απόψεις και άλλων διανοουμένων και φιλοσόφων για την ελεύθερη βούληση. Τους πρότεινε ενδεικτική βιβλιογραφία και ανέφερε μερικά ονόματα φιλοσόφων με σημαντική συνεισφορά στο θέμα όπως ο Άγιος Αυγουστίνος, ο Θωμά ο Ακινάτης, ο Νεύτωνας, ο Χιουμ και ο Καντ. Ο διδάσκων τους είπε ότι θα ήταν ενδιαφέρον να αρχίσουν με μια επισκόπηση του θέματος και ότι κατόπιν ήταν ελεύθεροι να συνεχίσουν εστιάζοντας σε κάποιο φιλόσοφο ή φιλοσόφους ή ρεύματα σκέψης που εύρισκαν ελκυστικά και ενδιαφέροντα σε σχέση με τις δικές τους σκέψεις και ιδέες.

Οι φοιτητές δούλεψαν πολύ πάνω σ' αυτό το θέμα καθώς το βρήκαν ιδιαίτερα ενδιαφέρον. Έτσι, από την όγδοη εβδομάδα ως το τέλος του μαθήματος (12η εβδομάδα) παρουσίασαν στην τάξη στοιχεία από τη μελέτη τους καθώς και δικά τους σχόλια που εμπλούτισαν ουσιωδώς τη συζήτηση στην τάξη.

Ιδέες του Αγίου Αυγουστίνου και του Θωμά του Ακινάτη παρουσιάσθηκαν συχνά από φοιτητές και συζητήθηκαν στην τάξη. Ένα σημαντικό θέμα που εισήχθη με αυτή τη συζήτηση ήταν η σχέση ανάμεσα στην ελεύθερη βούληση, την ατομική ευθύνη, την επιβράβευση και την τιμωρία. Στο θέμα αυτό αφιερώθηκε ένα σημαντικό μέρος του δεύτερου μέρους του σεμιναρίου. Στη συζήτηση του θέματος οι φοιτητές παρουσίασαν και σχολίασαν σχετικές ιδέες και άλλων φιλοσόφων όπως των Χιουμ, Καντ, Σοπενχάουερ, Frankfurt, Strawson και Kane.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ορισμένα χαρακτηριστικά στοιχεία της συζήτησης στη τάξη γι' αυτό το θέμα. Ο Άγιος Αυγουστίνος και ο Θωμάς ο Ακινάτης αναφέρουν ότι η ελεύθερη βούληση δεν είναι η μόνη προϋπόθεση για την απόδοση ηθικής ευθύνης σε ένα πρόσωπο, αλλά πρέπει επίσης το πρόσωπο αυτό να έχει συνείδηση των συνεπειών των επιλογών του. Ιδιαιτέρως επισημαίνουν ότι τα παιδιά και οι τρελοί δεν μπορεί να θεωρηθούν υπεύθυνοι για τις πράξεις τους γιατί τους λείπει αυτή η συνείδηση. Αυτό ήταν ένα ζήτημα που συζητήθηκε έντονα μεταξύ των φοιτητών. Ορισμένοι φοιτητές επεσήμαναν ότι σε πάρα πολλές περιπτώσεις ένα άτομο δεν μπορεί να έχει καμία ικανοποιητική γνώση των μακροπρόθεσμων συνεπειών των επιλογών του εξαιτίας της ύπαρξης αντικειμενικών ή υποκειμενικών αβεβαιοτήτων. Κάποιοι φοιτητές είπαν ότι ηθική ευθύνη θα πρέπει να αποδίδεται σε ένα πρόσωπο σύμφωνα με τη γνώση που έχει για τις συνέπειες των επιλογών του. Άλλοι φοιτητές ανέφεραν ότι αυτό δεν είναι το μόνο στοιχείο που θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη για την απόδοση ηθικής ευθύνης, αλλά και οι κοινωνικές συνθήκες που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της βούλησης και του χαρακτήρα ενός ατόμου. Επιπλέον, ορισμένοι φοιτητές παρουσίασαν και σχολίασαν στοιχεία από τις εργασίες του Quetelet για το έγκλημα (Quetelet 1833, 1842, 1848). Ο Quetelet παρατήρησε μια αξιοσημείωτη σταθερότητα των στατιστικών στοιχείων μέσα στο χρόνο όσον αφορά στο πλήθος των εγκλημάτων και των αυτοκτονιών, ενώ βρήκε σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις διαφορετικές περιφέρειες και χώρες. Μια ερμηνευτική θέση του Quetelet που υπογράμμισαν οι φοιτητές είναι ότι το πλήθος και το είδος των εγκλημάτων προετοιμάζεται και καθορίζεται από τις συνθήκες και την οργάνωση της κοινωνίας, ενώ οι εγκληματίες είναι τα όργανα που εκτελούν τα εγκλήματα . Αυτά τα στοιχεία τροφοδότησαν τη συζήτηση για τα ελαφρυντικά που πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψη και σε συνδυασμό με την προηγούμενη συζήτηση, ορισμένοι φοιτητές εξέφρασαν την άποψη ότι στην πραγματικότητα είναι πολύ δύσκολο να αποδοθεί δίκαια ηθική ευθύνη σε κάποιον για τις επιλογές και τις πράξεις του. Στη συνέχεια της συζήτησης του θέματος πολλοί φοιτητές θεώρησαν ως ικανοποιητικές μετριοπαθείς απαντήσεις που περιέχονται σε ιδέες του Χιουμ και του Καντ.

Ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα είναι το ότι οι φοιτητές παρουσίασαν τις απόψεις αυστηρού ντετερμινισμού του Νεύτωνα και του Λαπλάς που στηρίζονται από πλευράς Φυσικής στην Νευτώνεια Μηχανική, καθώς και ιντετερμινιστικές απόψεις και ιδέες που υποστηρίζονται από πλευράς Φυσικής από την Κβαντική Θεωρία. Σύμφωνα με τις απόψεις του Νεύτωνα και του Λαπλάς το μέλλον είναι πλήρως καθορισμένο από τις συνθήκες που ισχύουν στο παρόν. Έτσι δεν υπάρχουν εναλλακτικές δυνατότητες για το μέλλον, αλλά ούτε και ελεύθερη βούληση. Σ' αυτό το πλαίσιο οι ιδέες και θεωρίες για την ελεύθερη βούληση καθώς και η θεωρία πιθανοτήτων είναι μόνο εννοιολογικά μοντέλα για να διαχειριστούμε πλευρές και όψεις της άγνοιας μας. Ο διδάσκων επεσήμανε ότι αν και υπάρχει αντικειμενική αβεβαιότητα σύμφωνα με την Κβαντική Θεωρία, η άγνοια μας είναι επίσης μια πραγματικότητα και μέρος της χρήσης της θεωρία πιθανοτήτων που κάνουμε οφείλεται στην άγνοια μας και όχι στην αντικειμενική αβεβαιότητα. Υπ' αυτή την έννοια η αντίληψη του Λαπλάς για τις πιθανότητες είναι εν μέρει σωστή. Ορισμένοι φοιτητές θεώρησαν ότι μια παρόμοια σκέψη ισχύει και για την ελεύθερη βούληση. Η ελεύθερη βούληση μπορεί πράγματι να υπάρχει αλλά μέρος των δυνατοτήτων που της αποδίδουμε να οφείλεται στην άγνοια μας για τους περιορισμούς που αφορούν στην επίδρασή της καθώς και στην άγνοια μας για τις κοινωνικές επιδράσεις που καθορίζουν τη βούληση μας. Οι φοιτητές δεν πείσθηκαν ως προς τις ντετερμινιστικές ιδέες του Νεύτωνα και του Λαπλάς, αλλά το ότι προσωπικότητες αυτού του διαμετρήματος υποστήριζαν αυτές τις ιδέες ενίσχυσε την αναζήτησή τους για τους περιορισμούς της ελεύθερης βούλησης και για μερικούς, την αναζήτησή τους όσον αφορά στην ύπαρξη ή όχι της ελεύθερης βούλησης.

6. Τελικές Γραπτές Εργασίες

Ο διδάσκων ζήτησε κάθε φοιτητής να υποβάλλει μια γραπτή εργασία, τουλάχιστον 6000 λέξεων, στην οποία έπρεπε να παρουσιάζει και να σχολιάζει στοιχεία από τη συζήτηση στην τάξη καθώς και στοιχεία από την προσωπική του μελέτη όσον αφορά στις θέσεις των φιλοσόφων για την ελεύθερη βούληση. Τους επεσήμανε δε ότι μπορούσαν επίσης να αναπτύξουν τις δικές σκέψεις και ιδέες στα θέματα που εξέταζαν. Οι εργασίες έπρεπε να παραδοθούν το αργότερο ένα μήνα μετά το τέλος των μαθημάτων στην τάξη.

Στις εργασίες τους όλοι οι φοιτητές εξετάζουν θέματα που αφορούν στους περιορισμούς της επίδρασης της ελεύθερης βούλησης των ανθρώπων, καθώς και παράγοντες που επιδρούν στην διαμόρφωση της βούλησης τους. Ορισμένοι εξ' αυτών θεώρησαν τη συζήτηση για τα προαναφερθέντα στο πλαίσιο της αναζήτησης τους για το κεντρικό ερώτημα της ύπαρξης ή όχι της ελεύθερης βούλησης. Υπάρχουν επίσης φοιτητές που συζητούν στις εργασίες τους τη σημασία της κριτικής σκέψης για τους προαναφερθέντες περιορισμούς και παράγοντες και το ρόλο που παίζει η οικογένεια, η εκπαίδευση και το κοινωνικό περιβάλλον για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Έξι φοιτητές εστιάζουν στη σχέση ελεύθερης βούλησης και ευθύνης και τρείς εστιάζουν στη σχέση μεταξύ αβεβαιότητας, τύχης και ελεύθερης βούλησης.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να σημειώσουμε τους φιλοσόφους/επιστήμονες των οποίων απόψεις αναφέρονται πιο συχνά στις εργασίες των φοιτητών (ο αριθμός μετά το όνομα κάθε φιλοσόφου είναι ο αριθμός των εργασιών που αναφέρονται σε απόψεις του).

Quetelet 26, Θωμάς Ακινάτης 11, Άγιος Αυγουστίνος 10, Καντ 9, Χιουμ 7, Χομπς 6, Αριστοτέλης 3, Νεύτωνας 3, Frankfurt 3, Λαπλάς 2, Fichte 2, Σοπενχάουερ 2, Everett 2, Steiner 2, Strawson G. 2, Kane 2. Στις εργασίες των φοιτητών αναφέρονται απόψεις και άλλων 23 φιλοσόφων ωστόσο κάθε ένας εξ' αυτών αναφέρεται μόνο σε μία εργασία.

Ακόμη αξίζει να αναφερθούμε στις θέσεις που εκφράζουν οι φοιτητές στις εργασίες τους για το ερώτημα της ύπαρξης της ελεύθερης βούλησης. (α) Δέκα φοιτητές δεν είναι πεπεισμένοι ότι υπάρχει ελεύθερη βούληση. (α1) Δύο εξ' αυτών εκφράζουν τη γνώμη ότι η ελεύθερη βούληση είναι μια αυταπάτη. (α2) Οι άλλοι οκτώ έχουν αμφιβολίες για την ύπαρξη της ελεύθερης βούλησης. (β) Δεκαεννέα είναι πεπεισμένοι ότι η ελεύθερη βούληση υπάρχει αλλά ότι έχει σημαντικούς περιορισμούς (β1) Επτά εξ' αυτών δίνουν έμφαση στο ότι υπάρχουν άνθρωποι που δεν διαθέτουν ελεύθερη βούληση σε ουσιώδη θέματα (π.χ. άνθρωποι που από την παιδική τους ηλικία έχουν υποστεί συστηματική εκπαίδευση από ολοκληρωτικά καθεστώτα). (β2) Οι άλλοι δώδεκα δεν δίνουν έμφαση στο προηγούμενο.[17]

7. Καταληκτικά Σχόλια

7.1. Για τη συζήτηση με τους φοιτητές περί ελεύθερης βούλησης

Η φιλοσοφική συζήτηση για την ελεύθερη βούληση διαρκεί περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια και αποτελεί μέρος του φιλοσοφικού διαλόγου όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του ανθρώπου ως ατόμου και ως κοινωνικού όντος. Σε ένα τέτοιο θέμα, στόχος του μαθήματος δεν θα μπορούσε να είναι η ανάδυση και συζήτηση οριστικών απαντήσεων. Επιδιωκόμενος στόχος του μαθήματος ήταν η ανάδυση και συζήτηση ερωτημάτων και όψεων του θέματος τα οποία έως τότε είχαν απασχολήσει λίγο ή καθόλου τους φοιτητές. Τα στατιστικά στοιχεία και η ερμηνεία του Quetelet ήταν ένα σημαντικό στοιχείο για να τεθούν τέτοια ερωτήματα και να προκληθεί μια συζήτηση που κίνησε το ενδιαφέρον των φοιτητών.

Στο πρώτο μέρος του σεμιναρίου οι φοιτητές συζήτησαν σε αρχικό επίπεδο για τους περιορισμούς που αφορούν στην επίδραση της ελεύθερης βούλησης των ανθρώπων και για τους παράγοντες που διαμορφώνουν και καθορίζουν την βούληση τους. Σταδιακά οι φοιτητές συνειδητοποίησαν (i) ότι το θέμα είναι βαθύ και σύνθετο, (ii) ότι είχαν μικρή ενασχόληση και γνώση γι’ αυτό και (iii) ότι η εμβάθυνση σ’ αυτό το θέμα είναι σημαντική όσον αφορά σε φιλοσοφικά και κοινωνικά ερωτήματα, αλλά και ενδιαφέρουσα όσον αφορά στην προσωπική τους εξέλιξη. Αυτά τα τρία στοιχεία συνδυασμένα προκάλεσαν μεγάλο ενδιαφέρον στους φοιτητών και τους δημιούργησαν ισχυρό κίνητρο ώστε να δουλέψουν στο θέμα αυτό. Στο δεύτερο μέρος του σεμιναρίου οι ιδέες όλων των φιλοσόφων που συζητήθηκαν υπογράμμισαν την σημασία της κριτικής θεώρησης αυτού του θέματος, και αυτό ενίσχυσε ακόμη περισσότερο το ενδιαφέρον των φοιτητών ώστε να συνεχίσουν την διερεύνησή του. Εξαιτίας αυτού του ενδιαφέροντος σε πολλές περιπτώσεις η δουλειά των φοιτητών ξεπέρασε κατά πολύ της τυπικές απαιτήσεις του μαθήματος. (Για τα προαναφερθέντα παρουσιάζονται στο παράρτημα ορισμένες χαρακτηριστικές απόψεις των φοιτητών όπως εκφράσθηκαν στις τελικές συνεντεύξεις - αποσπάσματα 1-3.)

7.2. Για την στατιστική και την ελεύθερη βούληση

Η δουλειά που έγινε με τους φοιτητές τους επέτρεψε να κατανοήσουν καλλίτερα την διάκριση μεταξύ τυχαίας και όχι τυχαίας μεταβλητότητας και το πως λειτουργεί η μεταβλητότητα στα κοινωνικά φαινόμενα σε συνδυασμό με τον ΝΜΑ. Επίσης η δουλειά που έγινε επέτρεψε στους φοιτητές να εμπλουτίσουν την εννοιολογική τους εικόνα (concept image) ως προς το σε τί αφορά η Στατιστική και το πώς λειτουργεί. Ειδικότερα: (i) Οι φοιτητές συνειδητοποίησαν ότι η Στατιστική δεν είναι απλώς η τεχνική επεξεργασία δεδομένων, αλλά αφορά ακόμη και σε θέματα όπως η ελεύθερη βούληση, η οποία όχι μόνο είναι ένα θεμελιώδες φιλοσοφικό ζήτημα αλλά αφορά και σε σημαντικές πλευρές της κοινωνικής και προσωπικής ζωής. (ii) Είχαν την ευκαιρία να συνειδητοποιήσουν ότι σε θέματα όπως η ελεύθερη βούληση η Στατιστική μπορεί να συνεισφέρει κρίσιμης σημασίας μακροσκοπικές πληροφορίες που δεν μπορούν να προσεγγισθούν εάν περιορισθούμε να εξετάσουμε το θέμα μόνο στο ατομικό (μικροσκοπικό) επίπεδο. (iii) Συνειδητοποίησαν ότι σημαντικό μέρος της Στατιστικής είναι η ερμηνεία των στατιστικών αποτελεσμάτων. Επίσης συνειδητοποίησαν βασικές πλευρές αυτής της ερμηνευτικής δουλειάς. Κατά την διάρκεια της ερμηνευτικής δουλειάς οι φοιτητές συνέδεσαν τα στατιστικά αποτελέσματα με ιδέες και πεποιθήσεις τους καθώς και με στοιχεία από το εμπειρικό τους υπόβαθρο. Αυτή η σύνδεση συχνά οδήγησε στην εξέλιξη ιδεών και πεποιθήσεων καθώς και στην ανάδυση νέων ερωτημάτων και ιδεών. Για τους φοιτητές η ερμηνεία των στατιστικών αποτελεσμάτων ήταν το πιο ενδιαφέρον μέρος της Στατιστικής. Επίσης ήταν το μέρος εκείνο που έδωσε νόημα στα αποτελέσματα αυτά[18].

Επιπλέον, εξαιτίας της συνδυασμένης παρουσίας των τριών προαναφερθέντων στοιχείων βελτιώθηκε η στάση και το ενδιαφέρον πολλών φοιτητών για τη Στατιστική, την οποία έβλεπαν προηγούμενα ως ένα όχι ελκυστικό αντικείμενο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:
Αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις των φοιτητών που πραγματοποιήθηκαν από τον διδάσκοντα μετά το τέλος του μαθήματος[19]

(1) Μαρία

Ποτέ δεν πίστευα ότι ένα μάθημα στατιστικής μπορούσε να αφορά τόσο ενδιαφέροντα θέματα, και εννοώ όχι μόνο ενδιαφέροντα ακαδημαϊκά αλλά ενδιαφέροντα προσωπικά για τον καθένα μας... Είναι όλες αυτές οι αποφάσεις και οι επιλογές που πίστευα ότι είναι δικές μου, και μετά συζητώντας και σκεπτόμενη γι' αυτό το θέμα συνειδητοποίησα ότι υπάρχουν τόσο πολλές επιρροές που καθορίζουν τη βούληση μας! Δούλεψα και αναρωτήθηκα πολύ, τί από τις επιλογές και τις αποφάσεις μου είναι στ' αλήθεια δικό μου, και ποιο μέρος ευθύνης είναι στ' αλήθεια δικό μου. Είναι δύσκολη ερώτηση αλλά είναι σημαντικό να βρει κανείς τουλάχιστον μερικές απαντήσεις. Θέλω να πω, είναι σημαντικό όχι μόνο φιλοσοφικά αλλά και προσωπικά .... Εξαιτίας αυτών των ερωτημάτων έκανα πολύ δουλειά από δικού μου, και όχι γιατί το ζητούσε το μάθημα.

(2) Κατερίνα

Βρήκα πολύ σημαντική τη συζήτηση για τους περιορισμούς και τις δυνατότητες της ελεύθερης βούλησης ... Για παράδειγμα, ο Quetelet έχει πολύ δίκιο όταν λέει ότι έχουμε την τάση να ακλουθούμε και να κάνουμε ό,τι λέει το περιβάλλον και οι άλλοι... Αυτό το θέμα, "να κάνουμε ό,τι αρέσει στους άλλους", είναι ένα θέμα που του αφιέρωσα πολύ σκέψη, όχι μόνο γενικά, αλλά και όσον αφορά στον εαυτό μου, τη δική μου στάση και συμπεριφορά... Επίσης, τα στατιστικά στοιχεία του Quetelet δείχνουν ότι παρά την ελεύθερή μας βούληση, η κοινωνία, σαν καλολαδωμένη μηχανή, παράγει τα ίδια αποτελέσματα κάθε χρόνο. Αυτά τα στατιστικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι η ελεύθερή μας βούληση έχει μια "περιορισμένη σφαίρα επιρροής", όπως λέει ο Quetelet. Με όλη τη συζήτηση και το διάβασμα σ' αυτό το θέμα, έφθασα να πιστεύω ότι αυτή η σφαίρα επιρροής είναι μικρή. Αλλά πόσο μικρή; Αυτή είναι μια σημαντική ερώτηση που μένει ακόμα αναπάντητη για μένα... Αυτές οι συζητήσεις στο μάθημά μας έβαλαν ερωτήσεις και ανάψανε φωτιές που δεν πρόκειται να σβήσουν σύντομα. Στην πραγματικότητα, όπως το καταλαβαίνω εγώ, μόλις αρχίσαμε να αντιμετωπίζουμε αυτές τις ερωτήσεις.

(3) Άννα

... Ένα άλλο σημαντικό ζήτημα ήταν αυτό για την ελεύθερη βούληση και τη ευθύνη. Με τη συζήτηση που έγινε συνειδητοποίησα πόσο σύνθετο και δύσκολο είναι το να κρίνεις δίκαια τις επιλογές και τις πράξεις των ανθρώπων. Κι' όμως το κάνουμε εύκολα και ελαφριά κάθε μέρα, αλλά έτσι πολύ πιθανά γινόμαστε άδικοι χωρίς καν να το καταλάβουμε. Τώρα, αυτό δεν είναι απλά μια ακαδημαϊκή συζήτηση, αν κανείς καταλάβει καλλίτερα αυτό το θέμα πολύ πιθανά θα αλλάξει στάση όταν κρίνει τους άλλους...

(4) Φωτεινή

...Ποτέ δεν είχα σκεφτεί ότι η στατιστική μπορεί να είναι τόσο ενδιαφέρουσα. Δηλαδή, θέλω να πω, είναι ενδιαφέρουσα γιατί συνδέεται με το θέμα της ελεύθερης βούλησης, που όπως είδαμε είναι σημαντικό και φιλοσοφικά και κοινωνικά και προσωπικά. Επίσης ήταν και ο τρόπος που δουλέψαμε με τα στατιστικά στοιχεία. Στο σχολείο, στη στατιστική την περισσότερη ώρα υπολογίζαμε μέσους όρους και κάναμε γραφικά, έτσι πίστευα ότι η στατιστική είναι πολύ βαρετή. Εδώ συζητούσαμε πολύ τα στατιστικά αποτελέσματα και προσπαθούσαμε να τα εξηγήσουμε, συζητούσαμε παραδείγματα και ατομικές περιπτώσεις σε συνδυασμό με τα στατιστικά αποτελέσματα. Ήταν τα στατιστικά αποτελέσματα του Quetelet αλλά ήταν και οι ιδέες του Quetelet για να τα εξηγήσει και μετά βάλαμε δικές μας ιδέες και μπορούσαμε να συζητήσουμε δικά μας παραδείγματα, ακόμα και δικές μας σχετικές προσωπικές εμπειρίες. Και μετά, με όλα αυτά, αρχίσαμε να καταλαβαίνουμε το πρόβλημα της ελεύθερης βούλησης· θέλω να πω, δεν βρήκαμε οριστικές απαντήσεις αλλά βρήκαμε βαθύτερα και πιο πλατιά ερωτήματα και είδαμε όψεις του θέματος που ούτε καν είχαμε υποψιαστεί ότι υπάρχουν... Ήταν πραγματικό συναρπαστικό μάθημα· αν αυτό είναι Στατιστική, τότε η Στατιστική είναι πολύ πιο ενδιαφέρουσα απ' ό,τι φανταζόμουν.

(5) Εύα

...Με όλες αυτές τις αιτίες και τους παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν και να αλλάξουν τη θέληση ενός ανθρώπου για να παντρευτεί δεν μπορούσα να φανταστώ τέτοια σταθερότητα στον αριθμό τον γάμων κάθε χρόνο, και όχι μόνο γενικά αλλά και σε κάθε κατηγορία και σε κάθε περιοχή. Και η σταθερότητα στον αριθμό των εγκλημάτων, αυτή είναι ακόμα πιο εντυπωσιακή. Είναι σημαντικό αυτό που λέει ο Quetelet στο άρθρο του, ότι χωρίς τη στατιστική οι άνθρωποι μπορεί να πιστεύουν ότι οι ιδιαιτερότητες των ατομικών ελεύθερων βουλήσεων μπορούν να δημιουργήσουν σημαντικές αλλαγές από χρόνο σε χρόνο στον αριθμό των γάμων ή στον αριθμό των εγκλημάτων. Αλλά αυτή είναι μια λάθος ιδέα που υπερεκτιμά τις δυνάμεις και τις δυνατότητες των ιδιαιτεροτήτων των ατομικών ελεύθερων βουλήσεων, επιπλέον είναι μια ιδέα που παρουσιάζει την κοινωνία πιο ακατάστατη απ' ό,τι είναι στ' αλήθεια. Αυτό είναι που βρίσκω σημαντικό με τα στατιστικά αποτελέσματα, επιτρέπουν να ξεκαθαρίζονται πράγματα και να αποφεύγονται μερικές σημαντικές λάθος ιδέες...

Σημειώσεις

* Το κείμενο αποτελεί απόδοση στα ελληνικά του άρθρου των συγγραφέων "Statistics and Free Will", in E. Barbin, U. Jankvist, T. Kjeldsen (eds) *Proc. of the 7th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, Aarhus University, Denmark (υπό έκδοση, 2015).

1. Ο Quetelet ονομάζει *Στατιστική περί τα ηθικά* (Statistique Morale) την περιοχή της Στατιστικής που ασχολείται με φαινόμενα όπως τα εγκλήματα, η αυτοκτονία, ο γάμος, τα οποία είναι φαινόμενα που μπορεί να γίνουν αντικείμενο ηθικού χαρακτηρισμού (Hankins 1908 ch 4., Lottin 1911).
2. Της οποίας δύο κύρια στοιχεία ήταν ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (ΝΜΑ) και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) των DeMoivre και Laplace.
3. Το μάθημα είχε διάρκεια έξι διδακτικών ωρών την πρώτη εβδομάδα, 3 ωρών την επόμενη, 6 τη μεθεπόμενη κ.ο.κ. (έτσι το μάθημα είχε διάρκεια κατά μέσον όρο 4,5 ώρες την εβδομάδα).
4. Στο δεύτερο μέρος οι φοιτητές παρουσίασαν επίσης στοιχεία από άλλες εργασίες του Quetelet, οι οποίες αφορούν στα εγκλήματα και τις αυτοκτονίες.
5. Η δουλειά των φοιτητών στο Λύκειο τους δημιούργησε την εντύπωση ότι η Στατιστική είναι κυρίως τεχνική επεξεργασία δεδομένων (υπολογισμοί, δημιουργία γραφημάτων κλπ), εξαιτίας αυτού πολλοί φοιτητές θεωρούσαν τη Στατιστική ως διόλου ελκυστικό αντικείμενο.
6. Π.χ. Η ανάλυση των σφαλμάτων μέτρησης που προέρχονται από τυχαία σφάλματα και από συστηματικά σφάλματα, ή η ανάλυση αποζημιώσεων που καταβάλλουν οι ασφαλιστικές εταιρείες, οι οποίες θεωρείται ότι οφείλονται σε συστηματικά και σε τυχαία αίτια.
7. Το κείμενο της εργασίας αυτής είναι διαθέσιμο στο διαδίκτυο: http://www.edc.uoc.gr/~tzanakis/Quetelet1847Marriages.pdf
8. Όταν ο Quetelet αναφέρεται στην ελεύθερη βούληση των ανθρώπων, εννοεί τις ιδιαιτερότητες των ελεύθερων βουλήσεων των ανθρώπων και όχι τα κοινά στοιχεία των βουλήσεων τους. Προφανώς οι επιδράσεις αυτών των κοινών στοιχείων δεν αλληλοεξουδετερώνονται και δεν εξαφανίζονται στις παρατηρήσεις μεγάλων πληθυσμών. Όπως το θέτει ο Lottin, ο Quetelet θεωρεί την ελεύθερη βούληση ως μία δύναμη αντίδρασης (reaction force) που δημιουργεί ατομικές ιδιαιτερότητες (Lottin 1911). Ωστόσο οι φοιτητές χρησιμοποιούσαν τον όρο «ελεύθερη βούληση» με το σύνηθες νόημα που συμπεριλαμβάνει τις ατομικές ιδιαιτερότητες και τα κοινά στοιχεία της ανθρώπινης βούλησης. Έτσι ο διδάσκων αποσαφήνισε αυτό το σημείο για να μην παρερμηνευθεί το κείμενο του Quetelet.
9. Οι φοιτητές προτίμησαν να χρησιμοποιήσουν την Μ.Α.Α. ως συνολικό μέτρο διασποράς αντί της Τυπικής Απόκλισης (Τ.Α.), γατί την θεωρούσαν απλούστερη και πιο κατανοητή από την Τ.Α. Ο διδάσκων δέχθηκε αυτή την επιλογή, ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις στη συνέχεια τους ζήτησε να υπολογίσουν και την Τ.Α. ώστε σταδιακά να εξοικειωθούν, αλλά και να επωφεληθούν από την συγκριτική θεώρηση της Μ.Α.Α. και της Τ.Α.
10. Τα τέσσερα ποσοστά που αφορούν στις Μ.Α.Α. ήταν μεταξύ 2,2% και 4,3%, αυτά που αφορούν στις διαφορές των μεγίστων τιμών από τους αντίστοιχους Μ.Ο. ήταν μεταξύ 3,2% και 5,5%, και αυτά που αφορούν στις διαφορές των Μ.Ο. από τις αντίστοιχες ελάχιστές τιμές ήταν μεταξύ 3% και 5%.
11. Το ποσοστό που αφορά στη Μ.Α.Α. ήταν 1,4%, αυτό που αφορά στη διαφορά μεγίστη τιμή-Μ.Ο ήταν 2,6%, και αυτό που αφορά στη διαφορά Μ.Ο.- ελάχιστη τιμή ήταν 3,1% (Ο Μ.Ο. του συνολικού ετήσιου αριθμού γάμων ήταν 29131).
12. Στη συνέχεια ο διδάσκων είπε ότι θα ήταν ενδιαφέρον εάν μπορούσαν να βρουν ένα τρόπο να εκτιμήσουν το μέγεθος των μέτρων μεταβλητότητας που είναι πιθανό να προκύψουν από τυχαία μεταβλητότητα και στη συνέχεια να το συγκρίνουν με το μέγεθος των μέτρων μεταβλητότητας που υπολογίσθηκε στα στατιστικά δεδομένα του Quetelet. Έξι φοιτητές δούλεψαν σ'

αυτό το θέμα με τη βοήθεια του διδάσκοντος, σε δραστηριότητες ανεξάρτητες από το υπόλοιπο μάθημα. Έκαναν ενδιαφέρουσα δουλειά και χρησιμοποίησαν -μεταξύ άλλων- μεγάλους αριθμούς τυχαίων δειγμάτων ως άτυπα εργαλεία για να απαντήσουν σε ερωτήματα που τέθηκαν. Η δουλειά τους δεν παρουσιάζεται εδώ λόγω έλλειψης χώρου.

13. Επιπλέον, ο Quetelet συνδέει αυτή την ισχυρή τάση με την έμφυτη κοινωνικότητα των ανθρώπων, η οποία τους οδηγεί στο να παραχωρούν οικειοθελώς ένα μέρος της ατομικότητας τους προκειμένου να γίνουν μέλη της κοινωνίας.

14. Π.χ. επιλογή κλάδου πανεπιστημιακών σπουδών και επαγγέλματος.

15. Επιπλέον οι φοιτητές βρήκαν πρόσφατα στατιστικά στοιχεία για την Ελλάδα που δείχνουν μια πολύ σημαντική αύξηση (περίπου 30%) του αριθμού των αυτοκτονιών κατά τη διάρκεια της τρέχουσας οικονομικής κρίσης. Οι φοιτητές θεώρησαν ότι και αυτά τα στοιχεία συνάδουν με την ερμηνεία του Quetelet.

16. Επιπλέον άλλοι φοιτητές θεώρησαν την παρακάτω ενδιαφέρουσα αναλογία: Ο Quetelet παρατήρησε την ύπαρξη μακροσκοπικής σταθερότητας στα στατιστικά στοιχεία, ενώ συγχρόνως στο ατομικό επίπεδο υπάρχουν οι ιδιαιτερότητες της ανθρώπινης ελεύθερης βούλησης που είναι ακατάστατες και απρόβλεπτες, χωρίς ωστόσο να έχουν την δύναμη να καταστρέψουν την προαναφερόμενη σταθερότητα. Οι φοιτητές θεώρησαν ότι υπάρχει αναλογία ανάμεσα σ' αυτό και την σταθερότητα των μακροσκοπικών φαινομένων που περιγράφεται από τους ντετερμινιστικούς νόμους της Νευτώνειας μηχανικής και την απροσδιριστία που περιγράφεται από την Κβαντική Θεωρία και αφορά στα φαινόμενα μικροσκοπικού επιπέδου. Είναι ενδιαφέρον ότι η παρουσίαση των ερευνών του Quetelet από τον Herschel ενέπνευσε τον Maxwell, ο οποίος έτσι συνέλαβε μια αναλογία συγγενή με την προηγούμενη που τον οδήγησε στην στατιστική προσέγγιση των μικροσκοπικών φαινομένων στην Φυσική (Porter 1986, pp.115-116, 118, 121, 123).

17. Θα πρέπει ωστόσο να σημειώσουμε ότι πολλοί φοιτητές αναφέρουν ότι θεωρούν την θέση που εκφράζουν στην εργασία τους ως μια αρχική θέση, η οποία ίσως αλλάξει μετά από περαιτέρω μελέτη και εμβάθυνση στο θέμα.

18. Δείτε ορισμένες σχετικές γνώμες φοιτητών στο Παράρτημα, αποσπάσματα 4, 5.

19. Τα ονόματα των φοιτητών έχουν αλλαχθεί λόγω προστασίας των προσωπικών δεδομένων.

Αναφορές

Chandler, J. & S. Harrison (eds). (2012) *Probability in the Philosophy of Religion.* Oxford University Press.

Fisher, J.M., R. Kane, D. Pereboom and M. Vargas (2007) *Four Views on Free Will.* Blackwell.

Hacking, I. (1975) *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference.* Cambridge University Press

Hald, A. (2003) *A History of Probability and Statistics and their applications before 1750.* NJ: Wiley.

Hankins, F. H. (1908) *Adolphe Quetelet as Statistician.* Doctoral dissertation: Columbia University.

Kane, R. (1999) Responsibility, Luck, and Chance: Reflections on Free Will and Indeterminism. *The Journal of Philosophy,* 96(5), 217-240.

Laplace, P.S. (1840) *Essai philosophique sur les probabilités* (6ème ed.) Paris, Bachelier.

Lottin, J. (1911) *Le libre arbitre et les lois sociologiques d'après Quetelet. Revue néo-scolastique de philosophie,* 72, 479-515.

Porter, T.M. (1986) *The Rise of Statistical Thinking 1820–1900.* Princeton: Princeton University Press.

Quetelet, A. (1833) *Recherches sur le penchant au crime aux différents âges* (2ème édition). Bruxelles: M. Hayez.

Quetelet, A. (1842) *A treatise on man and the development of his faculties.* Edinburg: William and Robert Chambers pub.

Quetelet, A. (1847) Statistique morale. De l'influence du libre arbitre de l'homme sur les faits sociaux, et particulièrement sur le nombre des mariages. *Bulletin de la Commission Centrale de Statistique,* t.III., 135-155. Bruxelles: M. Hayez.

Quetelet, A. (1848) Sur la statistique morale et les principes qui doivent en former la base. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences des Lettres et des Beaux-arts de Belgique,* 21. Bruxelles: M. Hayez.

Seneta, Eu. (2003) Statistical Regularity and Free Will: L.A.J. Quetelet and P.A. Nekrasov. *International Statistical Review,* 71(2), 319–334.

Stigler,S.M. (1986) *The history of statistics: the measurement of uncertainty before 1900.* Harvard University Press.

Stigler, S.M. (1999) *The Average Man is 168 years old. Statistics on the Table* (ch. 2). Harvard University Press.

LONG TERM EFFECTS OF EXPOSURE TO PRIMARY HISTORICAL SOURCES IN UNDERGRADUATE STUDIES – THE CASE OF JULIUS

Uffe Thomas Jankvist
Aarhus University

> I've used the material later on. I've actually lend it out to others. I remember this; that we read these original texts, that we did these tasks. In a way, I actually think this is one of the things that I remember the clearest from my undergraduate mathematics courses. (Julius, 2015)

Abstract

The article addresses the question of which long-term effects an exposure to primary historical sources may have on students, exemplified by the case of Julius, who was exposed to extensive readings of such sources as an undergraduate student. The teaching module, in which the primary sources were a part, is described. The long term effect of the student is analyzed through a combination of two theoretical constructs; Niss' and Højgaard's overview and judgment and Barbin's special effects of using original sources in teaching mathematics. It is concluded that long-term effects are present in the case of Julius, and using the theoretical constructs it is described what these effects are.

Key words

Primary historical sources; original sources; guided reading; HAPh-modules; case study; long term effects.

Περίληψη

Το άρθρο θέτει το ερώτημα ποιες μακροπρόθεσμες επιδράσεις προκαλεί στους φοιτητές η επαφή τους με πρωτογενείς ιστορικές μαθηματικές πηγές. Ως παράδειγμα χρησιμοποιείται η περίπτωση, του Julius, που μελέτησε εκτενώς τέτοιες πηγές ως προπτυχιακός φοιτητής. Περιγράφεται το μάθημα του οποίου ήταν μέρος οι πρωτογενείς πηγές που μελέτησε. Στη συνέχεια αναλύονται οι μακροπρόθεσμες επιδράσεις στο φοιτητή με την χρήση δύο θεωρητικών κατασκευών: την λεγόμενη προσέγγιση «επισκόπησης και κρίσης» των Niss και Højgaard και την θεώρηση της Barbin που αφορά στις ειδικές επιδράσεις της χρήσης πρωτότυπων πηγών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η ανάλυση επιβεβαιώνει την ύπαρξη μακροπρόθεσμων επιδράσεων στη περίπτωση του Julius, οι οποίες περιγράφονται με την χρήση των προαναφερόμενων θεωρητικών κατασκευών.

Λέξεις Κλειδιά

Πρωτογενείς ιστορικές πηγές, αυθεντικές πηγές, καθοδηγούμενη μελέτη, HAPh-μαθήματα, μελέτη περίπτωσης, μακροπρόθεσμες επιδράσεις.

0. Introduction

All of us, who have used elements of history of mathematics with our mathematics students in a more or less extensive way, have probably wondered what the students gained in the long run from this exposure to history, what aspects stayed with them, and how they in hindsight view their earlier encounter with the history of mathematics. Of course, when students have completed their studies, they often disappear out of one's periphery. For that reason, I decided to catch one of my old students – *Julius* – in the spring term of 2015, just before he was about to complete his university studies, and interview him about his experiences and hindsight reflections concerning a historical project embedded in an undergraduate discrete mathematics course, I gave at Roskilde University in the spring term of 2012. But allow me to provide a bit more of the background story on this particular historical project and also on how the paths of this particular student and myself have crossed each other, and how the idea for this particular article came about.

In 2010 and 2011 I did a postdoc at the University of Southern Denmark, one purpose of which was to look further into the use of history of mathematics in Danish upper secondary schools. In particular, I attempted to design a couple of teaching modules which addressed *H*istory of mathematics, *A*pplication of mathematics, and aspects of *Ph*ilosophy of mathematics in unison – modules later referred to as *HAPh*-modules (e.g. Jankvist, 2012; 2013; 2014a; 2014b). Both of these modules were implemented in an upper secondary mathematics class, and eventually published as teaching materials in Danish.[1] At the beginning of 2012, I was employed at Roskilde University, and asked to co-teach a course in discrete mathematics, as part of the bachelor science program, a course which I had also taught there back when I was a doctoral student. This course is a more or less classic introductory course to discrete mathematics, involving topics such as propositional logic, basic set theory, algorithms and their complexity, recursivity, elementary number theory, basics of counting, permutations, combinations, relations, etc. At the end of this course, the students were to do a couple of mini-project assignments. One of these concerned logic programming, and was given by co-teacher, a mathematical computer scientist. The other project was left for me to decide; and having already tried out the two HAPh-modules with upper secondary students, I was eager to try them out also with first and second year university students.

As mentioned there were two HAPh-modules: one on graph theory and one on Boolean algebra. The students of the class were asked to choose one or the other, and to work through the modules in groups of approximately four. The student, Julius, who makes up the case study for this article was in a group who did the module on graph theory. Julius later went on to become a student of both mathematics and of history at Roskilde University. In the spring of 2013, I was employed at Aarhus University's Campus in Emdrup, Copenhagen, and was quite surprised to find Julius sitting in the reception. It turned out that he had been working there as a student helper since he was in upper secondary school. This meant that for a couple of years have been able to follow Julius quite closely, often having discussions with him regarding his studies, etc. For that reason, I decided to arrange a couple of interview sessions with him before he finally graduates, and 'disappears'.

In the following, I shall briefly describe the basic idea and design principles the HAPh-modules, and present the module on graph theory, since this module will make up the basis for the interviews with the student. (For a description of the other module, see Jankvist, 2013; 2014b). As part of this description, I shall spend some time reflecting on the essay assignment that the students were given as part of the module, and provide excerpts from their hand-in mini-project. Next, the interviews with the student Julius is presented and discussed. Finally, some potential conclusions are discussed in the relation to the questions which initially spurred on the idea for the article.

1. Designing a HAPh-module

The main idea for the HAPh-modules was spurred on by the Danish KOM-project's articulation of three kinds of so-called overview and judgment, which are "'active insights' into the nature and role of mathematics in the world" the purpose of which is to "enable the person mastering them to have a set of views allowing him or her *overview and judgement of the relations between mathematics and in conditions and chances in nature, society and culture*" (Niss & H jgaard, 2011, pp. 49, 73, italics in original). The three types of overview and judgment (OJ) are: (OJ1) the actual application of mathematics in other subject and practice areas; (OJ2) the historical evolution of mathematics, both internally and from a social point of view; and (OJ3) the nature of mathematics as a subject. As argued in Jankvist (2013), these three kinds of overview and judgment may be brought about by focusing on aspects, or exemplary cases (Jankvist, 2011), from the history (OJ2), the application (OJ1), and the philosophy (OJ3) of mathematics. Of course, the three types of overview and judgment may be seen as to concern meta-issues of mathematics (Jankvist, 2009), but as Niss and H jgaard (2011) point out, it is clear that if overview and judgment regarding the historical evolution of mathematics (OJ2) is to have any *weight* or *solidness*, it must rest on *concrete examples* from the history of mathematics – or to put it differently, reflections concerning the meta-issues must somehow build on or be anchored in concrete mathematical in-issues (Jankvist, 2011). Obviously, a similar argument holds for the other types of overview and judgment.

To realize the above idea, it was decided to have one overall theme for each of the HAPh-modules, to have the students read one primary historical source representing the historical, applicational, and philosophical aspects, respectively, and to end the module with an essay assignment. The reason for 'resorting' to primary historical, or original, sources has to do with what Barbin (1997) and Jahnke et al. (2000)[ii] refer to as the three general ideas best suited for describing the special effects of using original sources in mathematics education: *replacement* (or in the original French wording; *fonction vicariante*), which refers to the replacement of the usual with something different, for example by allowing mathematics to be seen as more than just a corpus of knowledge and techniques; *estrangement* or *reorientation* (*fonction dépaysante*, or *dépaysement*), which challenges one's perception by making the familiar unfamiliar, thus also causing a reorientation of our views, and; *cultural understanding* (*fonction culturelle*), which allows us to place the development of mathematics in a scientific, technological, or societal context of a given time and place. However, because primary historical sources may often be difficult to access, the presentation of these in the modules were supplied with explanatory comments and illustrative tasks along the way. This form of presentation and way of working is referred to as a *guided reading* of primary original sources, a described by Barnett, Lodder and Pengelly (2014). Practically no mathematical requirements were needed beforehand on the students' behalf to study the text of Euler – a major reason for choosing this text initially – and many of those needed for the Dijkstra text were introduced in the guiding commentaries along with the Euler text, thereby also bringing the students somewhat up to date with modern notation, terminology, etc.

As for the essay assignments, I have previously found that this is a good way of bringing small groups of students to work with meta-issues of mathematics (Jankvist, 2011). The particular setting creates a scene, where students at the end of the implementation of the teaching module, after having read and worked with the mathematical case in question, are to discuss among themselves meta-issues regarding the case. These meta-issues are chosen beforehand and included in the description of the essay assignment at the end of the teaching material; although in such a manner that the students can draw in additional meta-issues should they find it relevant. In the module on graph theory, the students first and foremost were to relate the two first texts on history and applications to the philosophical discussion in the third text as part of their essay assignments – a task which to some extent also forces out some of the interplay between the three dimensions, although still exemplified by the concrete case of graph theory and the chosen overall theme. In the following section, I describe this overall theme and briefly introduce the three texts.

2. A module on Euler paths, shortest path, and minimum spanning trees

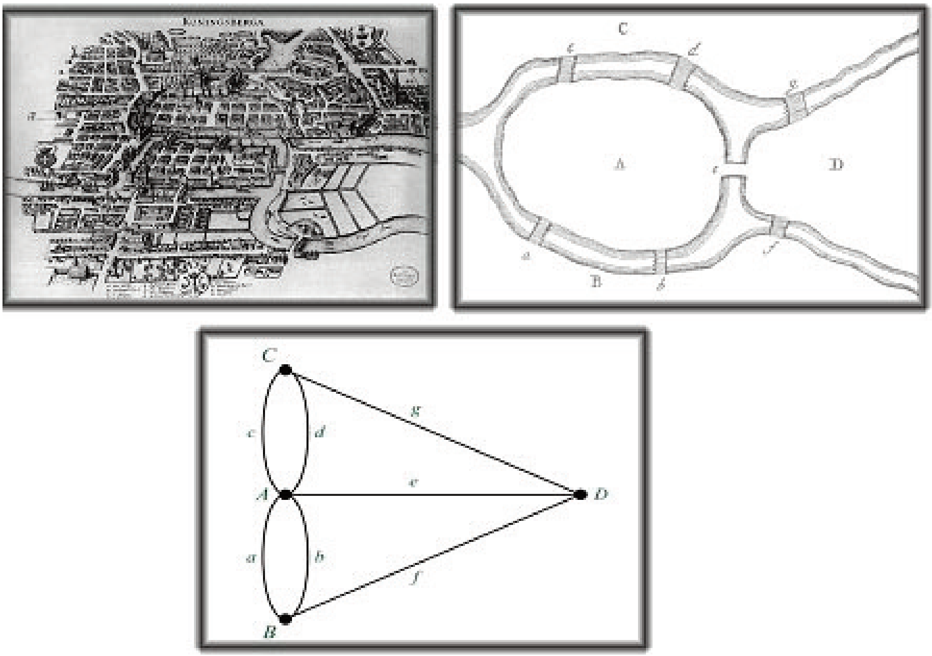
The three texts (in Danish translation) included in the teaching material for the module on graph theory were:

- Leonhard Euler, 1736: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*
- Edsger W. Dijkstra, 1959: *A Note on Two Problems in Connexion with Graphs*
- David Hilbert, 1900: *Mathematische Probleme – Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900* (the introduction only).

The module was conceived as to have an overall theme, this being *mathematical problems*, which was what Hilbert addressed in general terms in the introduction of his lecture from 1900. To make Hilbert's general observations somewhat more concrete, the students were first to read the two other texts, each of which addresses a mathematical problem. Euler's paper from 1736 is on the *Königsberg bridge problem*: how to take a stroll through Königsberg crossing each of its seven bridges once and only once – and today the paper is considered the beginning of mathematical graph theory. Two centuries later, with the dawn of the computer era, graph theory (and discrete mathematics in general) found new applications. *Dijkstra's algorithm* from 1959 solves the problem of finding shortest path in a connected and weighted graph, and today it finds its use in almost every Internet application that has to do with shortest distance, fastest distance or lowest cost. Furthermore Dijkstra also discussed a method for finding *minimum spanning trees*, a problem relevant for the building of computers at the time, but also highly relevant today.

The students' way into the first original text was by looking at Euler's diagram of landmasses and rivers in Königsberg (figure 2, middle) and then verify that this is in fact an accurate representation (or model) of the Königsberg bridge problem by comparing with an illustration of the town (figure 2, left). Afterwards the students were told that in modern graph theory, landmasses are represented by vertices (or nodes) and links between them by edges. Students were asked to transform Euler's diagram into such a modern graph individually and then compare their own representation to their fellow classmates, this illustrating that graph representations can look different. The idea was to have the students adapt more and more schematic representations of the Königsberg bridge problem until arriving at something looking like figure 2 (right), gradually increasing the level of abstractness.

Figure 2. Left: An illustration of Königsberg with its 7 bridges from 1652
Right: Euler's 1736 simplification of Königsberg's bridges
Bottom: A modern graph representation



Once being familiar with the modern representation of a graph, the students were introduced to the problem of representing *multiple edges*, such as for example the two edges between vertices *A* and *B* in the Königsberg graph. These cannot be represented by only their pair, (*A*,*B*), since this causes ambiguity (which is why Euler also named them *a* and *b*, respectively). To illustrate a formal and general way of dealing with this to the students, they were provided with the following modern definition:

A graph ***G*** is a set of vertices *V*(***G***) and a set of edges *E*(***G***) together with a function ψ, which for every edge e   *E*(***G***) assigns a pair, called ψ(e), of vertices from *V*(***G***).

The students were then asked to write up the sets *V*(***G***) and *E*(***G***) for the Königsberg graph and the seven function values of ψ(e). On the one hand, the idea of this was to enable them to perceive the definition of a graph as a triplet $\boldsymbol{G}=\{V(\boldsymbol{G}), E(\boldsymbol{G}), \psi_{\boldsymbol{G}}\}$, and on the other hand to have them realize how the above definition in a general fashion resolves the problem of ambiguity, when two vertices in a graph have multiple edges.

As Euler, in his text, introduces various constructs, the students were introduced to the somewhat equivalent modern terminology in the intermediate commentaries, e.g. *route*, *path*, *Euler path* (open and closed), *subgraph*, *degree* of a vertex as well as a few small theorems which Euler explicitly or implicitly uses, such as for example the so-called *handshake theorem*. At the end of his paper, Euler states his three main results (Euler, 1736, p. 139 in Fleischner, 1990, p. II.19, numbering is mine):

(i) If there are more than two regions with an odd number of bridges leading to them, it can be declared with certainty that such a walk is impossible.

(ii) If, however, there are only two regions with an odd number of bridges leading to them, a walk is possible provided the walk starts in one of these two regions.

(iii) If, finally, there is no region at all with an odd number of bridges leading to it, a walk in the desired manner is possible and can begin in any region.

The students were first asked to formulate these three results using the modern terminology and notation they had been introduced to. Next, they were provided with a modern definition of a *connected graph*, i.e. that there exists a route between every pair of vertices, a property Euler does not state explicitly. Using this property, the three results may be reformulated as:

> If a connected graph G has more than two vertices of uneven degree, then it does not contain an Euler path.
>
> Let G be a connected graph, then G contains an (open) Euler path if and only if G contains exactly two vertices of uneven degree.
>
> Let G be a connected graph, then G contains a (closed) Euler path if and only if all vertices of G have even degree.

Most of Euler's efforts goes into proving his first result (i), and regarding the third (iii), which today is considered the main theorem of the paper, he only proves it in one direction. To introduce the students to the notion of if-and-only-if theorems, they were to consider result i as being of the form $\mathbf{P}:\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{B}$, and then identify **P**, **A**, and **B**. After having the students prove that $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg\mathbf{A} \Leftarrow \neg\mathbf{B}$ (by means of a truth table), they were asked to write up $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$ for result i, i.e. formulating the contrapositive of this theorem, which states that

> If G is connected and has an Euler path (open or closed), then G has two or less vertices of uneven degree.

Since Euler has shown, in his own context of course, that a graph will always contain an even number of vertices with uneven degree, we may distinguish between two different cases: when G has exactly two vertices of uneven degree and when it has none, i.e. when all vertices have even degree. These cases correspond to the ⇒–direction in results ii and iii, respectively. Thus, by looking at Euler's original text again, the students would be able to deduce that the missing parts of the proofs are the ⇐ –directions for results ii and iii. For result iii this is ascribed to Carl Hierholzer (published posthumous in 1873), and the students were shown this proof. Then they were asked to prove the ⇒–direction for iii and both ways for result ii using modern terminology.

While employed at *Mathematical Centrum* in Amsterdam in 1956, Dijkstra was asked to demonstrate how powerful the center's computer, the so-called ARMAC, was. He did so by devising an algorithm for finding shortest path between two nodes in a connected, weighted graph – today known simply as *Dijkstra's algorithm*. Dijkstra's description of his algorithm appeared in 1959 in a paper which also describes an algorithm for finding minimum spanning trees in connected, weighted graphs. Unlike Euler's text the text by Dijkstra is short and builds on a large apparatus of existing graph theory. In fact, the text is only a few pages long. Also, Dijkstra only provides the description of his algorithms and he gives no examples of running these and no proofs of their correctness either, only a few remarks about running time. Thus, this text needed some 'unpacking' for the students in the form of explanatory comments, additional examples, tasks, etc. For example, the students were provided with definitions of a *weighted graph*, a *tree*, and a *spanning tree*:

> A connected graph $\boldsymbol{T}$ without any subgraphs that are circuits is called a tree, and a tree that for some graph $\boldsymbol{G}$ contains all vertices of $V(\boldsymbol{G})$ is called a spanning tree.

To illustrate that finding a least spanning tree is not trivial, the students were asked to look at the Königsberg graph (figure 2, right) and find the number of different spanning trees that can be constructed from this, and then explain their method for finding the answer. (The answer, which is 21, may be calculated using the so-called (Kirchhoff-Trent) *Matrix-Gerüst-Satz*. Deleting the *i*'th row and column of this matrix and taking the determinant of the one dimension smaller matrix reveals it. But the students had to do it by systematic inspection.)

In fact, Dijkstra's motivation for devising an algorithm for finding minimum spanning tree had to do with a very specific problem related to the construction of the ARMAC computer. The massive size computers at the time required vast amounts of expensive copper wire to connect their components. Finding a minimum spanning tree corresponds to leading electricity to all electric circuits while using the least amount of expensive copper wire. (A few comments were of course made to the students about the earlier discoveries of the algorithms by Jarn k, Bor kva, Kruskal and Prim, respectively.)

Having worked through the Dijkstra text, the commentaries and examples to this, and a modern proof of the shortest path algorithm's correctness, the students got to the third text by Hilbert; the introduction of his 1900-lecture in which he discusses 'mathematical problems'. Paraphrasing Hilbert roughly, he states that often some mathematical development is spurred on by a problem in the extra-mathematical world. Then it is drawn into mathematics and rephrased so that it is hardly recognizable anymore and embedded in a much more general context. Years later, when this has grown into a mathematical discipline, what often happens is that it may then again be used to solve some new extra-mathematical problem:

> Surely the first and oldest problems in every branch of mathematics spring from experience and are suggested by the world of external phenomena. [...]
>
> But, in the further development of a branch of mathematics, the human mind, encouraged by the success of its solutions, becomes conscious of its independence. It evolves from itself alone, often without appreciable influence from without, by means of logical combination, generalization, specialization, by separating and collecting ideas in fortunate ways, new and fruitful problems, and appears then itself as the real questioner. [...]
>
> In the meantime, while the creative power of pure reason is at work, the outer world again comes into play, forces upon us new questions from actual experience, opens up new branches of mathematics, and while we seek to conquer these new fields of knowledge for the realm of pure thought, we often find the answers to old unsolved problems and thus at the same time advance most successfully the old theories. (Hilbert, 1902, quoted from the 2000-reprint, p. 409)

In a certain sense, the case of graph theory illustrates this: first, spurred on by the Königsberg bridge problem, which Euler generalized so that the answer to the original problem falls out as a small corollary to his more general results; and next, two centuries later when we have a much clearer idea about the discipline of graph theory, Dijkstra solves the extra-mathematical problem of shortest path (and also considers minimum spanning trees) in this graph theoretical context.

3. Three essay assignments

For the students to realize the above connection between the three original texts, and thus the three dimensions of history, application, and philosophy, they were asked to identify the criteria that Hilbert proposed for a good mathematical problem (e.g. that it must be explainable to laymen and that it must be challenging but not inaccessible, etc.) and see to what degree the problems treated by Euler and Dijkstra fulfill these, and then relate them to Hilbert's comments on the development of mathematics in general. The module included three essay assignments, each addressing different aspects in relation to overview and judgment.

The first essay was on the just discussed topic of *mathematical problems*, linking the three texts by Euler, Dijkstra, and Hilbert together. In their essay, Julius' group writes the following:

> The requirement that everyone in principle should be able to understand the problem is fulfilled by the problems [in the texts], since they do not require any mathematical specialist knowledge, but on the contrary concerns contemplations regarding general issues. [...]
>
> Concerning the development of mathematics [as a discipline], Hilbert [1902, p. 437] says: "History teaches the continuity of the development of science. We know that every age has its own problems, which the following age either solves or casts aside as profitless and replaces by new ones." The case in question fits nicely with this description by Hilbert, since when Euler tried to describe the [Königsberg bridge] problem, he began with the concrete issue and developed a general description of this by means of assigning symbols, etc. Later on a further generalization took place by introducing vertices and edges, this generalization then being used to solve yet other, though related, problems, as for example that of shortest path. (Julius' group, March, 2012)

The second essay was on *mathematical proofs* and first dealt with different kinds of proofs and proof techniques as well as the use and need for new signs and symbols (both arithmetical and graphical) in the development of new mathematics (concepts, definitions, etc.), something that Hilbert also addresses. The students were asked to discuss this with relation to Hilbert's text and try to draw connections to the two cases, in particular the advantages Dijkstra had in 1959 with a fully developed graph theoretical and conceptual apparatus at his disposal, as compared to Euler who had to start from scratch in 1736. Finally, the students were asked to look into Hilbert's actual discussion of proofs and their role in solving mathematical problems as well as the role of rigor in mathematical proofs. On the overall, the idea of this was to spur some reflections on the students' behalf regarding the epistemological development of the notion of proof. This final part is not really well developed in the essay by Julius' group, but they offer some reflections on the question of the 'graph theoretical and conceptual apparatus':

> These days one has a lager selection of well-defined notations and concepts at one's disposal when having to put forward mathematical theorems and formulate proofs. We may notice the difference if we look at the length of modern formulations of old proofs. The modern proofs are shorter and appear more concise in their formulation. [...]
>
> Since Euler was the first to treat a [graph theoretical] problem, he did not have a lot of mathematical tools to choose between. Instead he had to define the necessary concepts himself. When Dijkstra wrote his article, he could draw on the already developed definitions in graph theory, and from mathematics in general. (Julius' group, March, 2012).

The third essay was about *mathematics' status as a (scientific) discipline*, in its own right and in comparison to other disciplines, e.g. physics. Based on their readings of Hilbert, and the two texts by Euler and Dijkstra, the students were asked to try to point out some characteristics of mathematical problems, methods, and ways of thinking as well as to say something about the types of results mathematics delivers and what they may possibly be used for. They were invited to discuss this by comparing mathematics to other academic disciplines. Then they were asked to identify what Hilbert said about the differences and connections between mathematics and other disciplines, and then discuss to what extent they agree or disagree. With reference to their second essay, Julius' group point out the following:

> Mathematics has proofs, which other disciplines do not – proofs are not possible in the same manner in other disciplines, one has to document by means of experiments. In mathematics, one concerns oneself with abstracts entities within abstract structures, which Hilbert also talks about. Also, Hilbert discusses how mathematical knowledge can be applied within other subject areas. [...] In short, mathematics delivers solutions to general problems [outside of mathematics].
>
> Hilbert describes the difference between mathematics and science-related disciplines. [Unlike these] he sees mathematics as kind of unity, which no good will come of splitting up into smaller braches, because the different branches then cannot benefit from the results of one another. (Julius' group, March, 2012)

Finally, as the very last questions of the essay assignment, students were asked to comment on their experiences with having to read the three original sources. Julius' group said:

> We all agree that Euler's text was the best, because you take a real-life problem and transform it to a mathematical problem, which makes it easily understandable and entertaining at the same time. [Dijkstra's] text was compact, which made it hard-to-reach at first encounter, although both the approach and results were quite clear. [...] Since Hilbert's questions have contributed to shaping which mathematical problems prosperity has been concerned with, it is interesting to see what his personal views on mathematics were. (Julius' group, March, 2012)

4. Interviews with Julius

In February of 2015, Julius was in the fifth year of his university studies at Roskilde University, 23 years of age, and doing a combined master's degree in mathematics and history. In this respect, Julius was of course a bit special since he majors in subjects that are topics in the HAPh-modules. But as we shall see in the interview excerpts to follow, some of which are rather lengthy, this had some interesting consequences for his assessment of and hindsight reflections about the module and the exposure to historical source material. Furthermore, Julius had in mind to become an upper secondary school teacher, which resulted in a few didactic and pedagogical considerations as well, both concerning the module and mathematics teaching in general.

I conducted two interviews with Julius; a first somewhat long interview (45 minutes), and a second shorter follow-up interview (25 minutes). The interviews were had the form of collegial conversations and were semi-structured in the sense that although I had prepared an interview guide in advance, we would deviate from this time and again, if other interesting aspects aroused as part of the conversation. The following presentation of the interviews follows the conversation with Julius, i.e. the excerpts appear in the order which they occurred during the interview. The very first utterance of Julius was that which appears in the beginning of this article, and which was his reply to whether or not he recalled the module. Following this, Julius continued:

> I remember the Königsberg bridge problem clearly. It is a problem that I know in details. We were dragged through this – or guided through it, in a pedagogical way, right, while at the same time reading in the original about these issues. I'd definitely say that this module is one of the things I remember the best... What struck me at the time, and still does, and what impressed me, was that a single problem... I mean, how unimportant it is in principle, if you can walk through a town in a certain way... But then you generalize it, take it out of the town, out of its reality with bridges and islands. [...] I thought that was pretty impressive. That every time he [Euler] had a problem, he would see that you could write it up in a more general way, express it in a new fashion, so he could realize something new about it. The insight that this is what you often do in mathematics; try to generalize it as much as possible to find the underlying system, I mean take the problem out of its real context – that was exciting, seeing this being unfolded through the texts. Or through the original texts – as original as they can be – and also by way of getting some tasks, where instead of just being told, you had to realize it for yourself. [...] There were several tasks of the kind where the idea of you doing the task was to make you realize what Euler realized at this particular place of his text. At least that is how I perceived some of the tasks. [...] So we weren't just being told what was interesting. You had to discover some of the interesting points yourself. Often in math it's like, okay, here is a proof, here is a theorem, here are some examples, and some tasks for you to apply the theorem on. Whereas here you got a different understanding of what was going on, mathematically speaking, than the classical 'proof-theorem-kind-of-way'. Here you obtained realization, which meant that you could follow what was being talked about. (Julius, February 18, 2015)

Julius' answer above referring to the explanatory tasks led me to ask him another question from the interview guide, namely what he thought of the guiding reading approach:

> You challenge the classical way in which you learn something; because it's clear that some of the definitions and concepts are still there. But overall, the tasks were not designed for you to test something [i.e. a theorem] that you had to learn. You were not supposed to learn something specific by doing the task. You were to get some insight to help you better understand the original source. So, I think, the connection between the historical and the mathematical is much more substantial in this work. And you obtained an understanding of how Euler had thought – okay, not one hundred percent, of course – but you got the feeling that you did, that you could follow what went on in the original text. I mean, it's a different way of

> viewing a proof. And this was fun seeing unfolded at the time. [...] Of course, it is a major leap between the two texts [Euler's and Dijkstra's]. But still, there is a clear connection between them. It is fun to see how a single question can become almost an entire theory, after years of research, right, by different people. That was impressive. [...] It is fairly obvious, how it can be relevant and exciting to read. And that you see how the notation has changed. It is interesting to find out how this mathematics has come into being, right. I mean, if you are used to always being presented to mathematics kind of top down, with modern definitions, etc., then it is completely strange being thrown into an old text like this. Personally, I was already interested in mathematics and history, but this made my interest even bigger, or how should I put it... I mean, seeing it unfold in this way, seeing how you can cut up a text and present it so also people less nerdy than me would find it interesting to read. (Julius, February 18, 2015)

From the conversation with Julius, it was clear that he found that he from the module had learnt some history of mathematics. A natural question to ask was if he also found that he had learned some mathematics?

> I believe I did. [...] For example, doing these graphs [points to a figure similar to figure 1]. I clearly remember the shortest path problem [Dijkstra]. I made some projects later, where we did similar things, weighted edges and stuff. [...] But what I benefitted the most from, or at least what I feel I benefitted the most from, was that about the 'nature of mathematics'. I mean, also when you tell other people about mathematics, and when you think about how it actually develops; you look at something and then you generalize it. Then other people catch on and do something with it. I mean, it is not a straight path of someone initially thinking 'now I want to develop a theory that can be applied for exactly this thing'. It is rarely like that – at least in what I have seen: here someone looks at something specific and formulate a problem, which other people then try to solve for some 300 years. All of sudden you then realize that the methods used were not applicable at all for this specific problem, but that they could solve another different one. So often it is a rather rough and uneven path, and a kind of crooked way in which things are connected, and one which is very difficult to predict. [...]
>
> In the textbooks things are presented in a straight way – and as if they came into being in the same manner. So just obtaining an understanding of that often it is actually very, very different was exciting – also to see it for yourself. You don't think about it when reading you usual textbook, because the presentation is so top-down and stripped from all historical context. Also if you have a lecturer who just does things, and you are like... I mean, it is not obvious how much thought people had to do for decades or even centuries before arriving at anything looking like what you are being presented to on the blackboard during a single lesson, right. So you got an understanding of how mathematics has developed, how it came into being, and what make people throw them self at a mathematical problem. This became clear to me. And I don't think it was something I had really thought about in the same way before, not until we saw the sources and what people did. [...] There are some questions I wouldn't have posed, some thoughts

> about mathematics which I wouldn't have made, had I not seen it being unfolded in this particular way. (Julius, February 18, 2015)

Referring back to the essay assignment on the nature of mathematics as a discipline, I wanted to ask Julius on his current views on this, i.e. if and how mathematics is different from other (scientific) disciplines – also to see if his hindsight reflections were somehow different from the answer of his group in 2012.

> If you are to compare how Euler worked to some of the other disciplines, then it is obvious that it is something different. If a physicist is to solve a problem, he would work within physics; he would use some theories and tools from physics. But he would always return to the outset, return to the original problem. But in the Euler text there is almost no connection facing backwards – only forward. He generalizes, generalizes, generalizes, and fairly soon he couldn't care less about the Königsberg problem. He quickly realizes that he can answer this. But he doesn't answer it by actually answering the Königsberg problem. He answers it by being capable of answering a long line of similar questions; his answer is a "theory". He won't accept to solve just the one problem. He could have done that, of course. I mean spent three pages on solving only this one problem. But if he had *only* solved the Königsberg problem, then we would hardly ever have heard about it afterwards. And this I think is typical for mathematics. You generalize and take things further and further away from the outset. And this you get an impression of – or you get an image of how mathematics is as a discipline. (Julius, February 18, 2015)

Throughout both interviews, Julius keeps returning to two overall issues. The first is the above mentioned one of Euler's generalization of the Königsberg bridge problem to something which in essence has very little to do with neither Königsberg nor bridges. The other issue concerns the fact that mathematics developed in one context may later be applied in different contexts – one of the points made by Hilbert. Julius personally talked about the "external" and the "internal" influences on the development of mathematics – what is usually also referred to as inner and outer driving forces (Jankvist, 2011).

> Actually, it is a good example of exactly that, i.e. what began as bridges in a town ended up being used for something with telegraph cables. And then you realized – because you had the general theory – that telegraph cables and cobber wire connecting components in computer hardware, things which at first sight are not related in any way, actually is the same problem, only in different forms, because you realize that it can be treated as the same mathematical problem…
>
> Yes, the minimum spanning tree.
>
> Yes! Exactly, right.
>
> And you remember this after three years?
>
> Yes, yes. I remember we talked about this. I thought it was funny because of these problems, which one wouldn't immediately think to be related; I mean, if I list ten

> things and someone had to say which of these were related, or could be solved in the same mathematical way. [...] It has to do with how time changes. At one point in time you need telegraph cables, later you develop the computer, and you realize it involves a similar problem, only in a new form. [...] It has to do with the external world, how it develops, and how mathematics is brought into play. It is fun to see that it begins with an external question, which is dragged into mathematics, and then develops within the field of mathematics – internally, right – [...] and then it plays back at a problem that is not related to the initial problem. So, this thing with the telegraph cables, I remember very clearly. I mean that the mathematics can be used for different things which are not related. This, and then the thing with you generalizing a problem more and more, which I would say is part of the nature of mathematics; that you look for the simplest expression of something, the simplest problem of its kind, or the simplest way of writing up a whole line of problems – this is what you often want to do, right. You don't want to talk about just one problem. You want to say something about all problems having this particular form. (Julius, February 18, 2015)

Next, I asked Julius whether the Hilbert text had left any impression with him. At first sight apparently not, since he did not recall much of it. For that reason we agreed that he would reread the Hilbert text and we would talk briefly about this a week later. Maybe he would recall aspects of it, when rereading it. Also, there might be other hindsight reflections appearing from a rereading of the text that could be of interest for this particular article.

In the second interview, Julius again talked about things which he and his group had discussed in the essay assignments back in 2012, e.g. Hilbert's definition of a good mathematical problem and why both the Königsberg bridge problem and the shortest path problem fulfilled Hilbert's criteria. But one interesting thing which Julius brought up was related to the essay referring to Hilbert seeing no meaning in splitting mathematics into several braches, as is done in the natural sciences. Julius found that he could relate to what Hilbert said, also from doing various project works as part of his education at Roskilde University. But what he also pointed out was when being taught mathematics in regular courses, it often did appear as being divided into different branches – or "boxes" – which did not necessarily appear to be related.

> When you are being taught math, then you have analysis, and maybe it is called 'fourth dimension analysis' and you get the impression that it makes sense to have this division of topics into boxes. But when we do our student projects [at Roskilde University], then it isn't always clear what math to use... I mean, 'what do you have to say something about here?' and then you go for what you know. Then it is nice to see how Euler did. He wasn't restricted to a specific box to begin with. He looked at a problem, and then he thought about which things he needed to describe it. He wasn't in a predefined box. He chose elements from different branches of mathematics that he needed to describe his problem. So the texts by Euler and Dijkstra and their ways of working with mathematics illustrate well that

even though you may have been taught mathematics as being divided into boxes, when you actually have to use it for something, then it is not the case that if you are within this box, then you can only use the elements of this box. You use what makes sense. And if you can provide arguments, and if it makes sense within the system, then you can make use of the things you need. And that I think you get an idea about from these texts. (Julius, February 26, 2015)

Another thing which Julius brought up, and which was a bit surprising for me, was Gödel's incompleteness theorems. In the material surrounding the three primary historical sources, I took the opportunity to tell the story of Gödel's incompleteness theorems, since the first of these was presented in Königsberg on September 7, 1930 – the day before Hilbert gave a famous radio speech on mathematics, in which he said his immortal words: "Wir müssen wissen. Wir werden wissen." ("We must know. We will know").[iii] In the material, the two theorems and their consequences were outlined briefly, and connected to the history of Hilbert's speech, and the reactions from the mathematical community to Gödel's theorems.

Gödel's incompleteness theorems, right – I mean, I've always had an idea that you could draw a circle around mathematics, and say that this you know about mathematics, right. You've always had an idea that you were on rock solid ground, and that you could build from there. The idea that something at the bottom is not solid – you must give up on this. This has had a major influence on how I understand the discipline I work within – because you don't have this foundation. You can create temporary foundations, but you just have to accept, that there are things which you can't know for certain – or how you want to put it. I thought that was strange. I still think it is a little strange.

And you remember this? You remember Gödel's theorems from the course?

Gödel's theorems! Yes! I remember them from back then. And when I reread the material I recalled it. It was so strange, I thought. Of course, it wasn't like with the mathematicians described here, it didn't shake me to the core. I wasn't shocked like that, since I was still in the process of learning the subject. But still I was like; for real, is that how it is! Because in upper secondary school things were presented as this-is-how-it-is kind of knowledge. All the stuff with axioms, I didn't see until university. This is not like the first thing you hear. So, I definitely remember the incompleteness theorems.

5. Analysis

There are many approaches one could take to analyze the statements of Julius above. However, in the current analysis, I shall try to access the "long term effects of exposure to primary historical sources" on Julius through a discussion of his development of the three types of overview and judgment (Niss & H jgaard, 2011) and relate this to Barbin's (1997) effects of being exposed to primary sources: *fonction vicariante*; *fonction dépaysante*; and *fonction culturelle*. We may visualize this be means of the following table.

Table 1: Visualization of the two theoretical constructs from Niss and Højgaard (2011) and Barbin (1997)

	Application (OJ1)	History (OJ2)	Philosophy (OJ3)
Vicariante			
Dépaysante			
Culturelle			

Of course, when combining the constructs of Niss and H jgaard (2011) and Barbin (1997) into a three by three matrix, we may not expect to be able to plot elements into every cell of the matrix. Nor should we take the number of cells "filled in" as a criterion for success of the long term effect in regard to Julius. Rather we should view it as an organized way of thinking about the kind of effects this particular HAPh-module – with its guided reading approach (Barnett et al., 2014) to the use of primary historical sources – had on Julius and his image of mathematics as a (scientific) discipline (Jankvist, 2015). I shall do the analysis column by column, i.e. one type of overview and judgment at the time.

In relation to the first type of overview and judgment (OJ1), i.e. actual applications of mathematics in other subject and practice areas, Julius' talk of "boxes" may be seen as illustrating this. Or more precisely, it illustrates an important issue regarding mathematical modeling, which is how actual applications of mathematics often come into play. Namely, that although mathematics is usually taught as belonging to specific "boxes", in real life applications, you use what makes sense and what provides you with the needed answer when building a model. Julius relays this by stating that Euler did not operate in a "predefined box". This may be seen to relate to the issue of *fonction vicariante*, since Julius clearly has realized that mathematics is not only a corpus of knowledge and techniques, but also a hotchpotch of ways for bringing these into play in given situations and contexts.

Regarding the second type of overview and judgment (OJ2), i.e. the historical evolution of mathematics, both internally and from a social point of view, Julius' talk about external and internal influences on the development of mathematics illustrates this quite well. His "evidence" in this respect is the example of minimum spanning trees, telegraph cables and computer cobber wiring. He is able to relate this example to the technological and societal context (*fonction culturelle*), when he says that: "It has to do with how time changes"; "At one point in time you need telegraph cables, later you develop the computer..."; "It has to do with the external world, how it develops, and how mathematics is brought into play." In the interviews, Julius often talks about how mathematics has developed, and that textbooks do not provide you with a correct image of this, e.g. how long time it has taken to end up at the efficient notation which is so easily used by your lecturer today. Julius says that he had not thought about this before, not until he was exposed to primary historical sources. This may be seen as an element of *fonction vicariante*. Also an element of *dépaysement* is present, since the fact that the same "mathematics can be used for different things, which are not related" appears to have made quite an impression on Julius.

Concerning the third type of overview and judgment (OJ3), i.e. the nature of mathematics as a subject (and discipline), there are clearly also issues which have left an impression with Julius. Several times he mentions the generalizing nature of mathematics, with reference to Euler's treatment of the Königsberg bridge problem, and that in mathematics one wants to reduce something to the simplest problem, and provide as general an answer as possible. Clearly this is yet an element of *fonction vicariante*. As for *dépaysement* in relation to the nature of mathematics, the story of Gödel's incompleteness theorems certainly provides estrangement for Julius. Of course, in relation to these theorems there were no primary historical sources, so ascribing this particular element of *dépaysement* to exposure of original sources is an exaggeration. Still, in combination with the Hilbert text, it clearly led to a reorientation of Julius' image of mathematics.

6. Concluding discussion

Now, when performing an analysis as that in the previous section, there are always choices to be made. For example, Julius' example of minimum spanning trees in relation to telegraph cables and computer wiring could possibly also have been ascribed to the first type of overview and judgment instead of the second. Also, further examples to fill in the cells of table 1 could possibly be found in the data (taking into account that what is displayed is only a fraction of the full interviews). But this is not the important issue here. Rather the important issue is that there *are* examples of development of all types of overview and judgment, and there *are* examples of the exposure to original sources having resulted in all three potential effects. That is to say, even three years after the completion of the course in which Julius did a project involving a reading of historical primary sources, there are "measurable" effects in regard to 1) each of the three types of overview and judgment, and 2) in regard to the issues of *fonction vicariante*, *dépaysante*, and *culturelle*. All in all, the HAPh-module appears to have had an impact on Julius' image of "mathematics as a discipline" (Jankvist, 2015), in particular by providing evidence on which to develop this image, not least in relation to the various meta-issues surrounding the case of early graph theory and its later application the shortest path problem. But what also appears evident, is that these meta-issues to some extent are *anchored* in the in-issues of the mathematical cases (Jankvist, 2011) – and my hypothesis in relation to this is that the documented long term effect is not completely unrelated to the presence of anchoring in one way or another.

Furthermore, Julius is also able to provide hindsight reflections on the design of the HAPh-module, in particular the guided reading approach – and he is able to contrast the approach of reading primary historical sources to the usual textbook teaching. One question which is often raised in relation to the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics is whether this makes the students better mathematicians. Julius found that he did learn mathematics from the HAPh-module, but if it made him a *better* mathematician is not to say. However, what seems clear is that it made him a much more reflected student of mathematics. A student who is not only aware of the inner issues of the subject he is studying, but also the meta-perspective issues surrounding the subject, including its applications within other subject areas and disciplines, its historical evolution and development, and its science philosophical status. And my guess is that Julius is going to become an equally reflected teacher, who will be able to relay his own insights regarding the discipline of mathematics to his future students.

Σημειώσεις

1. The teaching materials may be found as texts 486 and 487 in the series 'Texts from IMFUFA': http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/
2. Chapter 9 in the ICMI Study on *History in Mathematics Education*; the chapter is written by Jahnke, Arcavi, Barbin, Bekken, Furinghetti, El Idrissi, da Silva and Weeks.
3. See: http://math.sfsu.edu/smith/Documents/HilbertRadio/HilbertRadio.pdf (Retrieved March 13, 2015).

Literature

Barbin, E. (1997) Histoire des Mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin AMQ*, Montréal, 37(1), 20-25.

Barnett, J. H., J. Lodder & D. Pengelley (2014) The pedagogy of primary historical sources in mathematics: classroom practice meets theoretical frameworks. *Science & Education*. 23(1), 7-27.

Dijkstra, E. W. (1959) A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik,* 1, 269–271.

Euler, L.(1736) Solutio prolematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae,* 8 (1736/1741), 128-140.

Fleischner, H. (1990) *Eulerian Graphs and Related Topics*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

Green, T. F. (1971) *The Activities of Teaching*. New York: McGraw Hill Book Company.

Hilbert, D. (1902) Mathematical problems, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 8, 437–479. (Reprinted in: *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society,* 37(4), 407-436, Article electronically published on June 26, 2000).

Jahnke, H. N. with A. Arcavi, E. Barbin, O. Bekken, F. Furinghetti, A. El Idrissi, C. M. Silva da Silva & C. Weeks (2000) The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel and J. van Maanen (Eds.) *History in Mathematics Education*, The ICMI Study, pp. 291–328. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jankvist, U. T. (2009) A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 71(3), 235–261.

Jankvist, U. T. (2011) Anchoring students' meta-perspective discussions of history in mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, 42(4), 346-385.

Jankvist, U. T. (2012) History, application, and philosophy of mathematics in mathematics education: accessing and assessing students' overview and judgment. Regular lecture at *ICME-12* in Seoul, Korea.

Jankvist, U. T. (2013) History, Applications, and Philosophy in mathematics education: HAPh – a use of primary original sources. *Science & Education*, 22(3), 635-656.

Jankvist, U. T. (2014a) On the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics. In M. R. Matthews (Ed.) *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*, pp. 873-908. Vol. 2 Dordrecht: Springer

Jankvist, U. T. (2014b) A historical teaching module on 'the unreasonable effectiveness of mathematics' – Boolean algebra and Shannon circuits. *British Society for the History of Mathematics. Bulletin*, 29(2), 120-133.

Jankvist, U. T. (2015) Changing students' images of "mathematics as a discipline". *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 41-56.

Niss, M. & T. Højgaard (eds.) (2011) Competencies and mathematical learning – ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Roskilde: Roskilde University. http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/485web_b.pdf

ΑΠΟ ΤΟΝ ΓΑΛΙΛΑΙΟ ΣΤΗΝ….. ΑΙΘΟΥΣΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεόδωρος Γ. Πάσχος
Μαθηματικός, Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Abstract

The close relationship between Mathematics and Physics during their historical development is generally considered to offer motivational power to the educational praxis. In this paper, we discuss a teaching approach inspired by history in which the integration of genetic 'moments' in the history can lead to the designing of a specific activity. We exploited historical elements from the mathematical study of motions in the later Middle Ages (14th century) and Galileo (17th century) in order to introduce first-year undergraduates in the Department of Mathematics to the Fundamental Theorem of Calculus. The activity was based on a problem of motion and its representation in Cartesian axes of velocity/time. We used an original text from Galileo's book *"Dialogues Concerning Two New Sciences"* concerning the free fall of bodies. In this paper, we present: (1) elements of the History of Mathematics and Physics which we used in designing the activity, (2) the didactic aims of the activity, (3) worksheets and excerpts from the students' interviews, and (4) observations from analysis of the collected data.

Keywords

Integrating history in mathematics' teaching, free fall of bodies, Fundamental Theorem of Calculus.

Περίληψη

Η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και της Φυσικής στη διδακτική πρακτική βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος των ερευνητών και των θεωρητικών στον τομέα της Διδακτικής τα τελευταία χρόνια. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μια διδακτική προσέγγιση εμπνευσμένη από την Ιστορία στην οποία η ενσωμάτωση γενετικών ιστορικών 'στιγμών' οδήγησε στο σχεδιασμό μιας διδακτικής δραστηριότητας. Αξιοποιήσαμε ιστορικά στοιχεία από τη μαθηματική μελέτη των κινήσεων κατά τον Ύστερο Μεσαίωνα (14ο αιώνα) και τον Γαλιλαίο προκειμένου να εισαγάγουμε πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος στο Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού. Η δραστηριότητα βασίστηκε σ' ένα πρόβλημα κίνησης και στην αναπαράστασή του με γράφημα ταχύτητας/χρόνου σε καρτεσιανούς άξονες. Χρησιμοποιήσαμε ένα πρωτότυπο κείμενο από το βιβλίο Διάλογοι για δύο νέες επιστήμες του Γαλιλαίου, σχετικά με την πτώση των σωμάτων στη φύση. Σε αυτό το άρθρο παρουσιάζουμε: (1) στοιχεία από την Ιστορία των Μαθηματικών και της Φυσικής που χρησιμοποιήσαμε στο σχεδιασμό της δραστηριότητας, (2) τους διδακτικούς στόχους της δραστηριότητας, (3) φύλλα εργασίας και τμήμα μιας συνέντευξης φοιτητών, και (4) παρατηρήσεις από την ανάλυση δεδομένων.

Λέξεις κλειδιά

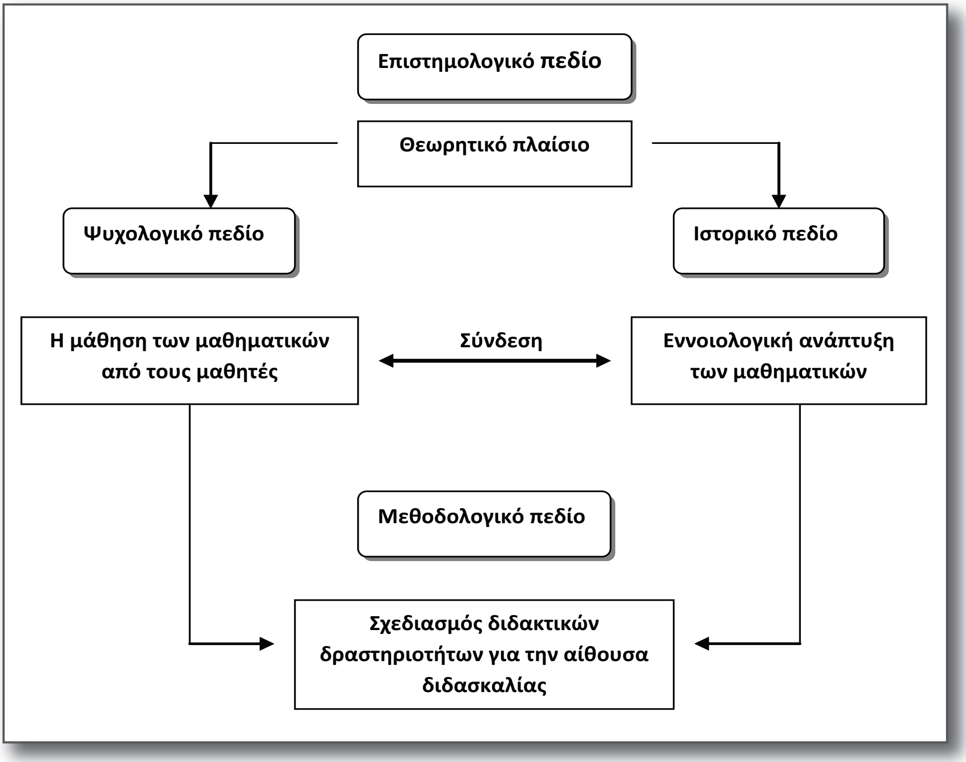
Ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία, ελεύθερη πτώση των σωμάτων, Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού.

1. Θεωρητικά ζητήματα

Η φιλοσοφική θεώρηση των μαθηματικών ως ανθρώπινης δραστηριότητας επιδιώκει να ερμηνεύσει τη μαθηματική σκέψη σ' ένα εξελισσόμενο ιστορικό process. Να ερμηνεύσει την ατομική σκέψη στα πλαίσια ενός δεδομένου πολιτισμικού, κοινωνικού περιβάλλοντος, να κατανοήσει τα ιστορικά χαρακτηριστικά των εν εξελίξει ιδεών και γεγονότων, να ταξινομήσει αλληλεπιδράσεις, να αναζητήσει αιτίες, να συγκρίνει αποτελέσματα.

Σύμφωνα με τους Radford κ.ά. (2000: 144), η ενσωμάτωση της ιστορίας απαιτεί ένα σαφές και πλούσιο θεωρητικό πλαίσιο για το γενικό σχηματισμό της μαθηματικής γνώσης. Επιπλέον μια σαφή επιστημολογική τοποθέτηση και μια αποδοτική μεθοδολογία (σχ. 1):

Σχήμα 1: Το θεωρητικό πλαίσιο αναφέρεται στη σύνδεση της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών και της μάθησης μαθηματικών από τους μαθητές, μέσω μιας μεθοδολογίας που υποστηρίζει το σχεδιασμό διδακτικών δραστηριοτήτων βασισμένων στην ιστορία



2. Μέθοδοι ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στην αίθουσα διδασκαλίας

Ζητούμενο είναι, το πώς θα αξιοποιηθεί η Ιστορία στη διδακτική πράξη. Ποιος είναι ο καταλληλότερος τρόπος ώστε η ιστορία να ανοίξει δρόμους στη μαθηματική κατανόηση. Να κάνει τη διαδικασία μάθησης ελκυστικότερη και αποδοτικότερη, να προωθήσει τη συλλογική διαπραγμάτευση και να ενισχύσει τα αλληλεπιδραστικά χαρακτηριστικά του κοινωνικού ρόλου της αίθουσας διδασκαλίας.

Σύμφωνα με τους Tzanakis & Arcavi (2000: 212) υπάρχουν τρεις τύποι πηγών αναφορικού υλικού: *Πρωτότυπες πηγές* (αποσπάσματα από αυθεντικά ιστορικά ντοκουμέντα), *δευτερεύουσες πηγές* οι οποίες σχετίζονται με ιστορικές αφηγήσεις, σχόλια και ερμηνείες, ανασυγκροτήσεις κλπ., τέλος, *πηγές διδακτικού υλικού* οι οποίες παραπέμπουν σε ιστορικά δεδομένα και συγκεκριμένες διδακτικές προσεγγίσεις εμπνευσμένες από την ιστορία.

Υπάρχουν διάφορες απόψεις αναφορικά με τον τρόπο αξιοποίησης του ιστορικού υλικού στην αίθουσα διδασκαλίας των μαθηματικών, οι οποίες μπορούν να ομαδοποιηθούν σε τρεις γενικές κατευθύνσεις ανάλογα με το διδακτικό στόχο:

(α) Εκμάθηση των μαθηματικών *άμεσα* από τα ιστορικά στοιχεία και τις σχετικές πληροφορίες.

(β) Εκμάθηση θεμάτων των Μαθηματικών, ακολουθώντας μια διδακτική στρατηγική σχεδιασμού και διδασκαλίας εμπνευσμένη από την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.

(γ) Ανάπτυξη της μαθηματικής συνείδησης προσεγγίζοντας την ίδια τη φύση των μαθηματικών καθώς και το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο ανάπτυξής τους. Μια τέτοια γενική κατηγοριοποίηση της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας δεν αποκλείει, τουναντίον, πολλές φορές προϋποθέτει τη συμπληρωματικότητα των προσεγγίσεων.

Στην παρούσα εργασία αξιοποιούμε ιστορικά στοιχεία *άμεσα,* προστρέχοντας σε ένα αυθεντικό κείμενο του Γαλιλαίου. Ο διδακτικός στόχος είναι η προσέγγιση πρωτοετών φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος στο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού στο πλαίσιο μιας αλυσίδας δραστηριοτήτων (Paschos, T. & Farmaki, V., 2007, Πάσχος, 2007).

3. Το ιστορικό πλαίσιο

3.1. Η μελέτη των κινήσεων κατά τον Ύστερο Μεσαίωνα

3.1.1. Η μελέτη των κινήσεων στο Merton College, τον 14ο αιώνα

Τον 14^{ο} αιώνα έχουμε ουσιαστικά την αφύπνιση της επιστημονικής μεθοδολογίας. Κατά την περίοδο αυτή κυριαρχούν στο Merton College στην Οξφόρδη οι *Calculators*, οι λογικιστές – μαθηματικοί: William του Heytesbury (1313-1372 μ.Χ.), Richard Swineshead, άκμασε γύρω στα 1344-1354 μ.Χ.), και ο John του Dumbleton (άκμασε γύρω στα 1331-1349 μ.Χ.), οι οποίοι μελετούν τις κινήσεις των σωμάτων. Οι κινηματικοί του Merton College δίνουν ορισμούς των διάφορων μορφών της κίνησης, κάνουν εικασίες, διατυπώνουν σχετικά θεωρήματα και τα αποδεικνύουν με μαθηματικό τρόπο, χωρίς να προσφεύγουν σε πειραματική επιβεβαίωση. Εισάγουν την ιδέα της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ ταχύτητας και χρόνου. Μιλούν για την *ένταση* της ταχύτητας ως αριθμητικής τιμής η οποία αντιστοιχεί σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, οδηγώντας στη διαισθητική ανάδυση της έννοιας της στιγμιαίας ταχύτητας. Αποδεικνύουν το *Θεώρημα μέσης τιμής,* γνωστό ως *κανόνα του Merton*, για την ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Ο William Heytesbury γράφει στο «Rules for Solving Sophisms» – Part VI. Local motion, (Clagett, 1959: 235):

> *Από τις τοπικές κινήσεις, καλείται ομοιόμορφη, εκείνη η κίνηση στην οποία μια ίση απόσταση διανύεται συνεχώς με την ίδια ταχύτητα σ' ένα ίσο χρονικό διάστημα. Η ανομοιόμορφη κίνηση, απ' την άλλη, ποικίλει σε ένα άπειρο αριθμό τρόπων, τόσο σε σχέση με την ποσότητα, όσο σε σχέση με το χρόνο.*

Ο ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας, της ομοιόμορφα και μη ομοιόμορφα επιταχυνόμενης κίνησης, δόθηκε από τον Heytesbury ως εξής (Clagett, 1959: 235):

> *«... σε μια μη ομοιόμορφη κίνηση η στιγμιαία ταχύτητα σε μια δεδομένη χρονική στιγμή μετράται ή προσδιορίζεται μέσω μιας διαδρομής που θα μπορούσε να γράφεται από ένα κινούμενο σημείο, αν σε μια χρονική περίοδο, εκινείτο με ομοιόμορφη κίνηση, με την ίδια τιμή της ταχύτητας με την οποία αυτό εκινείτο σ' αυτή τη χρονική στιγμή...*
>
> *Κάθε κίνηση είναι ομοιόμορφα επιταχυνόμενη (uniformiter intenditur) αν, σε οποιαδήποτε ίσα χρονικά διαστήματα, αποκτά ίσες αυξήσεις ταχύτητας....*
>
> *... Αλλά μια κίνηση είναι μη ομοιόμορφα επιταχυνόμενη όταν αποκτά μια μεγαλύτερη αύξηση της ταχύτητας σε μια χρονική περίοδο από ότι σε μια άλλη ίση περίοδο..»*

Το *Θεώρημα Μέσης Τιμής* (Mean Speed Theorem) του Merton College είναι ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα των μελετών των Calculators του Merton, σύμφωνα με το οποίο μετράται η ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με όρους της μέσης ταχύτητάς της, δηλ. της ταχύτητας στη μέση χρονική στιγμή της διάρκειας της επιτάχυνσης.

Η παλαιότερη διατύπωση του θεωρήματος, σύμφωνα με τον Clagett (1959: 262), υπάρχει στο *Regule solventi sophismata* του W. Heytesbury, στα 1335 μ.Χ.:

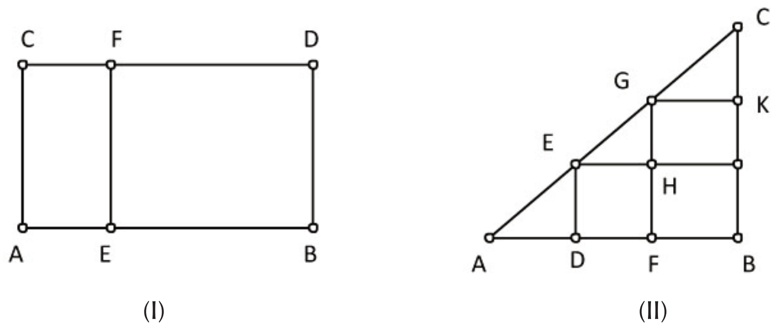
> *«Διότι είτε αρχίζει από την τιμή 0 ή από μια [πεπερασμένη] τιμή, κάθε πλάτος (latitude)* [δηλ. αύξηση ή μεταβολή της ταχύτητας, Θ.Π.] *εφ' όσον τερματίζεται σε κάποια πεπερασμένη τιμή, θα αντιστοιχεί στην μέση της τιμή. Έτσι το κινούμενο σώμα αποκτώντας ή χάνοντας αυτό το latidute ομοιόμορφα κατά την διάρκεια κάποιας καθορισμένης χρονικής περιόδου θα διανύσει μια απόσταση ακριβώς ίση με εκείνη που θα διένυε σε ίσο χρόνο, αν εκινείτο ομοιόμορφα με την μέση τιμή της ταχύτητας... Διότι κάθε κίνηση ως ολότητα, που συντελείται κατά την διάρκεια ολόκληρης της χρονικής περιόδου αντιστοιχεί στη μέση τιμή, δηλ. την τιμή* [της ταχύτητας, Θ.Π.] *την οποία θα είχε στη μέση χρονική στιγμή».*

3.1.2. Η εφαρμογή της γεωμετρίας των δύο διαστάσεων στη μελέτη των κινήσεων

Το πέρασμα στην Ευρώπη των κινηματικών συμπερασμάτων του Merton συνοδεύτηκε με την εφαρμογή ενός *γεωμετρικού μοντέλου αναπαράστασης των κινήσεων, και γενικότερα των ποιοτήτων, με σχήματα δυο διαστάσεων*. Πρόκειται για μια πρώτη μορφή γραφημάτων, που αναπαριστούσαν τις συναρτήσεις που υπονοούνται στις έννοιες της κίνησης. Βρισκόμαστε στην αρχή της ανάδυσης των νέων μαθηματικών, με έμφαση στα συστήματα αναπαράστασης (Farmaki, V. & Paschos, T., 2007).

Ο Nicole Oresme (1323 – 1382 μ.Χ.) αναπαράστησε με σχήματα δυο διαστάσεων τους ορισμούς που δόθηκαν στο Merton College. Ως ένα παράδειγμα της τεχνικής του, ας θεωρήσουμε τα παρακάτω σχήματα (ορθογώνιο παραλ/μο και ορθογώνιο τρίγωνο, σχ. 2). Καθ' ένα από αυτά αναπαριστά κάποια κίνηση. Η γραμμή AB, σε κάθε περίπτωση, παριστά την *έκταση* της κίνησης. Αλλά εκτός από την έκταση, έχει αναπαρασταθεί και η *ένταση* της κίνησης, κατά σημείο.

Σχήμα 2



Αυτό το έκανε ο Oresme με τη χάραξη κατακόρυφων γραμμών προς τη γραμμή της βάσης AB των σχημάτων. Το μήκος των κατακόρυφων γραμμών ποικίλουν, όσο οι εντάσεις μεταβάλλονται. Έτσι σε κάθε σημείο κατά μήκος της AB, υπάρχει κάποια *ένταση* της ταχύτητας, και το σύνολο όλων αυτών των γραμμών αναπαριστά την ταχύτητα στο σύνολό της.

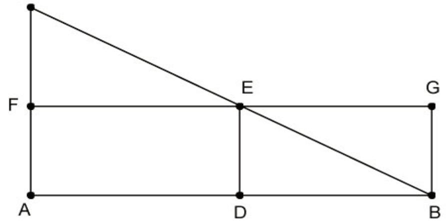
Με αυτόν τον τρόπο το ορθογώνιο ABCD αναπαριστά την ομοιόμορφη ταχύτητα - κίνηση, οι γραμμές AC, EF, BD αναπαριστούν τις εντάσεις της ταχύτητας στα σημεία A, E, και B (το E μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο της AB) και είναι ίσες. Όμοια, στην περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου ABC, φαίνεται ότι τα μήκη των κατακόρυφων γραμμών που αναπαριστούν εντάσεις, αυξάνουν ομοιόμορφα ως προς το μήκος. Άρα, το ορθογώνιο τρίγωνο, λέμε, ότι αναπαριστά μια ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη ταχύτητα - κίνηση (Boyer, 1959: 83). Φυσικά οι εντάσεις μπορούν να μεταβάλλονται με έναν άπειρο αριθμό τρόπων και έχουμε μιαν απεριόριστη ποικιλία σχημάτων να αναπαραστήσουμε άλλα είδη *μη ομοιόμορφων* κινήσεων.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, ο Oresme σχεδίασε την *«οριακή γραμμή»* CD (ή AC στην περίπτωση του τριγώνου), ως τη *«γραμμή των κορυφών»*-line of summit (*linea summitatis*), ή τη *«γραμμή της έντασης»*-line of intensity (linea intensionis) (Clagett, 1959: 353, 374). Ένωσε δηλ. τις πάνω άκρες των διακριτών εντάσεων της ταχύτητας (σχ. 2). Αυτό, μπορεί να συγκριθεί με μια καμπύλη στη σύγχρονη αναλυτική γεωμετρία. Ως εκ τούτου, *τα σχήματα τα ίδια*, στο σύστημα του Oresme, *μπορούν να συσχετισθούν με τα εμβαδά κάτω από τις καμπύλες*. Η 'καμπύλη' της γραμμής των κορυφών του Oresme αναπαριστά μια 'συνάρτηση' η οποία εκφράζεται λεκτικά. Η λεκτική έκφραση της συνάρτησης είναι «μια ομοιόμορφη ποιότητα-ταχύτητα», «μια ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη ποιότητα-ταχύτητα» κλπ. Οι *μεταβλητές* σ' αυτές τις 'συναρτήσεις' του Oresme είναι: η *«έκταση» – χρόνος κίνησης*, η *«ένταση» – τιμή της ταχύτητας σε κάθε χρονική στιγμή»* και η *«ποσότητα της ταχύτητας»* ως η διανυόμενη απόσταση η οποία αναπαρίσταται από το εμβαδόν του σχήματος.

Εδώ ο Oresme φαίνεται να κάνει μια μετάβαση, κατά τρόπο διαισθητικό, από τις διακριτές, κατά σημείο του υποκειμένου, εντάσεις της ταχύτητας, στο σύνολο του σχήματος και ως εκ τούτου στο συνεχές της γραμμής της έντασης. Αυτό το επιτρέπει το συνεχές της γραμμής της έκτασης πάνω στην οποία υψώνονται οι κατακόρυφες το *σύνολο* των οποίων δημιουργεί το επίπεδο σχήμα, σαρώνοντας την υποκείμενη γραμμή (*De configurationibus qualitatum*, κεφ. II.8, όπως αναφέρεται στο Clagett, 1959: 356, Clagett, 1968: 64, 289, Kaput, 1994: 93).

Το Θεώρημα της μέσης τιμής του Merton, εξισώνει μια ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη κίνηση με μια ομοιόμορφη κίνηση με ταχύτητα ίση με τη μέση τιμή της μεταβολής της ταχύτητας της μεταβαλλόμενης κίνησης, με την έννοια ότι διανύονται ίσες αποστάσεις σε ίσα χρονικά διαστήματα και στις δύο κινήσεις. Η απόδειξη του Oresme είναι καθαρά γεωμετρική. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου του οποίου το ύψος ισούται με τη μέση τιμή της ταχύτητας είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου του οποίου το ύψος αναπαριστά τη συνολική μεταβολή της ταχύτητας (Clagett, 1959: 358-359; Clagett, 1968: 409) (σχ. 3).

Σχήμα 3



Η απόδειξη του Oresme βασίζεται σε προτάσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας (τα τρίγωνα FEC και EBG είναι ίσα, κλπ, Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση XXVI). (Σταμάτης, 1975)

Σύμφωνα με τον Boyer (1959: 83), αυτό το θεώρημα και η γεωμετρική απόδειξη που έδωσαν ο Oresme και αργότερα ο Γαλιλαίος, έπαιξαν ένα κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη των απειροστικών μεθόδων και του ολοκληρωτικού Λογισμού.

3.2. Η συμβολή του Galileo Galilei (1564 – 1642 μ.Χ.) στη μελέτη των κινήσεων

Ο Γαλιλαίος στρέφεται στη μελέτη των κινήσεων διερευνώντας τη «*μαθηματική γλώσσα της Φύσης*». Με τη μέθοδό του, το «*καθ' υπόθεσιν επιχείρημα*» (Crombie, 1992, τ. Β: 146), αναζητά τους μαθηματικούς νόμους που διέπουν τα φαινόμενα. Σχηματικά μπορούμε να περιγράψουμε τη μέθοδό του ως εξής:

1. Μέσω της παρατήρησης του εμπειρικού κόσμου *διατυπώνει υποθέσεις* (υποθέσεις εργασίας) για τη σχέση αιτίου – αποτελέσματος ενός φαινομένου.
2. Δημιουργεί μαθηματική θεωρία προσαρμοσμένη στις υποθέσεις και οδηγείται σε *μαθηματικά συμπεράσματα*.
3. Την αλήθεια ή τη διάψευση των συμπερασμάτων του, επιβεβαιώνει με *πειράματα προσαρμοσμένα σ' αυτά τα μαθηματικά συμπεράσματα*.
4. Με αυτόν τον τρόπο οδηγείται στην επιβεβαίωση ή τη διάψευση των αρχικών υποθέσεων.

Στο τελευταίο του βιβλίο *Διάλογοι για δύο νέες επιστήμες* (Galilei, 1954), ορίζει την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση την οποία αναπαριστά με σχήματα δύο διαστάσεων σύμφωνα με το μοντέλο του Oresme. Αποδεικνύει αρχικά το θεώρημα μέσης τιμής του Merton περιγράφοντας μια *διαδικασία 'ολοκλήρωσης'* (Galilei, 1954:160). Στο κομβικό 2^{o} θεώρημά του στην ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη κίνηση, αναφέρει:

> «*Οι αποστάσεις που διανύονται από ένα σώμα που πέφτει με μια ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση* [εκκινώντας] *από την ηρεμία, είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των χρονικών διαστημάτων που απαιτούνται προκειμένου να διανυθούν αυτές οι αποστάσεις,* δηλ.: $(S_1/S_2) = (t_1^2/t_2^2)$».

Στο πόρισμα που ακολουθεί (Galilei, 1954: 175), στηρίζεται η πειραματική επιβεβαίωση ότι η πτώση των σωμάτων υπό την επίδραση του βάρους τους είναι κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη. Συγκεκριμένα αναφέρεται:

> «*Οι αποστάσεις που διανύονται σε ίσα χρονικά διαδοχικά διαστήματα στην ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση, είναι ανάλογες των περιττών αριθμών, αρχίζοντας από τη μονάδα, δηλ.:* $(S_1/1) = (S_2/3) = (S_3/5) = (S_4/7) = \ldots$».

(Βλέπε στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ το διάλογο με τις σχετικές αποδείξεις από το κείμενο του Γαλιλαίου).

Οι μαθηματικές αποδείξεις του $2^{ου}$ θεωρήματος και του πορίσματος με την *υπόθεση* ότι η ταχύτητα, κατά την πτώση των σωμάτων, είναι ανάλογη του χρόνου και η κίνηση είναι ομοιόμορφα επιταχυνόμενη, υπάρχουν στα κείμενα του Oresme, τρεις αιώνες πριν. Είναι όμως έτσι τα πράγματα *στη φύση;* Αυτό ακριβώς θέλει να επιβεβαιώσει πειραματικά ο Γαλιλαίος. Ότι η πτώση των σωμάτων υπό την επίδραση του βάρους τους είναι κίνηση ομοιόμορφα επιταχυνόμενη, εξετάζοντας το φυσικό φαινόμενο και όχι μια υποθετική κίνηση όπως έκανε ο Oresme. Επιχειρεί προσομοίωση της ελεύθερης πτώσης με το κεκλιμένο επίπεδο και την κάθοδο των μεταλλικών σφαιρών υπό την επίδραση μιας συνιστώσας του βάρους τους. Οι μετρήσεις του επιβεβαιώνουν τα μαθηματικά του συμπεράσματα (ότι δηλ., $\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$).

Άρα επιβεβαιώνει πειραματικά ότι στη φύση, η ελεύθερη πτώση *είναι* ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση, όπως κατηγορηματικά δηλώνει στο σχετικό κείμενο (το οποίο εμπεριέχεται πλήρως στο φύλλο εργασίας παρακάτω, όπως δόθηκε στους φοιτητές).

Σχηματικά, η μεθοδολογία της επιστημονικής προσέγγισης του Γαλιλαίου σχετικά με την πτώση των σωμάτων, θα μπορούσε να αποδοθεί ως εξής (σχ. 4):

Σχήμα 4

<u>**Παρατήρηση**</u>: Η ταχύτητα αυξάνει κατά την πτώση των σωμάτων με την πάροδο του χρόνου.

↓

Υπόθεση: Κατά την **πτώση** των σωμάτων η κίνηση είναι **ομαλά επιταχυνόμενη**. Άρα σύμφωνα με τον ορισμό της κίνησης, **η ταχύτητα είναι ανάλογη του χρόνου**.

↓

Με δεδομένη την υπόθεση ως ΑΞΙΩΜΑ, **κατασκευάζει μαθηματική θεωρία** και γεωμετρικό μοντέλο μελέτης της κίνησης και καταλήγει σε μαθηματικά συμπεράσματα:

(1) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$ και (2) $\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \ldots$, σε ίσους χρόνους.

↓

Κατασκευάζει πείραμα προσαρμοσμένο στα παραπάνω μαθηματικά συμπεράσματα ώστε να τα ελέγξει εμπειρικά. Επιβεβαιώνει μέσω μετρήσεων, σε πραγματικές συνθήκες, τα μαθηματικά του αποτελέσματα

↓

Συμπεραίνει: Η αρχική υπόθεση, η οποία στήριξε τους περαιτέρω συλλογισμούς, δηλ., **ο ορισμός της κίνησης ως ομαλά επιταχυνόμενης, κατά την πτώση, είναι αληθής.**

Ισχυριζόμαστε ότι μέσω της εφαρμογής της μεθόδου στην περίπτωση της μελέτης της καθόδου των μεταλλικών σφαιρών στο κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους τους, ο Γαλιλαίος έχει προσεγγίσει διαισθητικά το *Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού* (Πάσχος, 2007). Όχι μόνο αποδεικνύει τη δευτεροβάθμια σχέση διανυόμενης απόστασης – χρόνου *με δεδομένη την υπόθεση της γραμμικής συνάρτησης της ταχύτητας*, αλλά και αντίστροφα, αποφαίνεται για το μοναδικό *'αίτιο'* δεδομένης της πειραματικής επιβεβαίωσης του μαθηματικού *'αποτελέσματος'*. Δηλαδή, *επιβεβαιώνοντας πειραματικά τη δευτεροβάθμια σχέση απόστασης – χρόνου, συμπεραίνει ότι η ταχύτητα είναι γραμμική συνάρτηση*.

4. Η διδακτική προσέγγιση και η συλλογή δεδομένων

Στην πειραματική διδασκαλία συμπεριλάβαμε μια δραστηριότητα στην οποία οι φοιτητές καλούνται να προσεγγίσουν διαισθητικά το Θεμελιώδες θεώρημα, μέσα από το αυθεντικό κείμενο του Γαλιλαίου που αναφέρεται στο γνωστό πείραμα του κεκλιμένου επιπέδου. Ο διδακτικός στόχος ήταν να εμπλακούν οι φοιτητές σε μια ερευνητική διαπραγμάτευση της σχέσης μεταξύ της μαθηματικής μοντελοποίησης μιας πραγματικής κατάστασης και του πειραματισμού που προκύπτει ως αποτέλεσμα των μαθηματικών συμπερασμάτων.

4.1. Δραστηριότητα 'GALILEO GALILEI' - Φύλλο εργασίας:

"Ο Γαλιλαίος παρατηρεί τις πέτρες καθώς πέφτουν από την οροφή του πύργου της Πίζα. Ένας από τους βοηθούς του φροντίζει να αφήνει σε ελεύθερη πτώση μια πέτρα κάθε φορά που του γνέφει ο Γαλιλαίος".

Έτσι ιστορεί η παράδοση τα πειράματα του Γαλιλαίου τα σχετικά με τη μελέτη της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων. Ας υποθέσουμε ότι βρίσκεστε στο περιβάλλον του Γαλιλαίου και σας ζητείται να πάρετε μέρος στις μαθηματικές επεξεργασίες μελέτης της κίνησης των σωμάτων κατά την πτώση. Ο Γαλιλαίος *ισχυρίζεται* ότι η πτώση των σωμάτων *είναι ομαλά επιταχυνόμενη* κίνηση. (Η πτώση υπό την επίδραση του βάρους των σωμάτων, είτε ως ελεύθερη πτώση, ή ως κάθοδος σε ένα κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση μιας σταθερής συνιστώσας του βάρους τους. Την κίνηση αυτή την χαρακτηρίζει ως *φυσικά επιταχυνόμενη κίνηση*).

Α) Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα πέφτει ελεύθερα υπό την επίδραση του βάρους του. Σας ζητάει να σχεδιάσετε, με δεδομένο τον ισχυρισμό του, το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο για την κίνηση αυτή. (Θεωρήστε χρονικό διάστημα [0, t]).

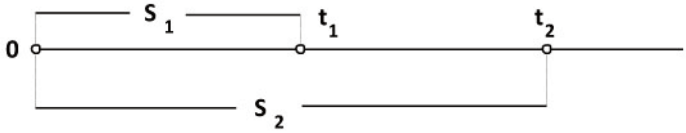
Β) Σας ζητάει να υπολογίσετε τη μετατόπιση ως συνάρτηση του t. (Από το γράφημα να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης θέσεως του σώματος).

Στο βιβλίο του Γαλιλαίου, *Διάλογοι για δυο νέες επιστήμες*, σελ. 175-179, διαβάζουμε:

Θεώρημα II (Στην «φυσικά» επιταχυνόμενη κίνηση)

Οι αποστάσεις που διανύονται από ένα σώμα που πέφτει (κατέρχεται), [εκκινώντας] από την ηρεμία, με μια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των χρονικών διαστημάτων που χρειάζονται για να διανυθούν αυτές οι αποστάσεις.

(Δηλ. ο λόγος των αποστάσεων οι οποίες διανύονται, από την αρχή της κίνησης, από το ίδιο σώμα το οποίο πέφτοντας εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ισούται με το λόγο των τετραγώνων των χρονικών διαστημάτων που απαιτούνται προκειμένου να διανυθούν οι αποστάσεις αυτές. Με σύγχρονο συμβολισμό $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$).



Πόρισμα. Αν πάρουμε οποιαδήποτε **ίσα** χρονικά διαδοχικά διαστήματα, μετρώντας από την αρχή της κίνησης, στα οποία διανύονται αντιστοίχως οι αποστάσεις S_1, S_2, S_3, S_4,..., τότε $\frac{S_1}{1}=\frac{S_2}{3}=\frac{S_3}{5}=\frac{S_4}{7}=\ldots$ (Διατύπωση σε σύγχρονη απόδοση).

Γ) Χρησιμοποιώντας το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο που κατασκευάσατε παραπάνω, να αποδείξετε το Θεώρημα II του Γαλιλαίου.

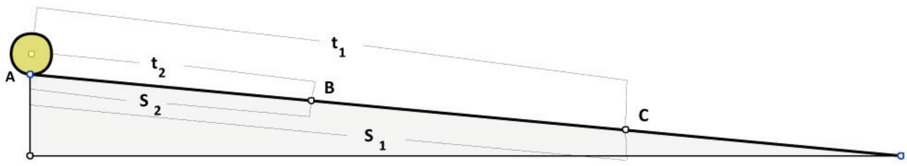
Δ) Χρησιμοποιώντας το γράφημα ταχύτητας – χρόνου να αποδείξετε το πόρισμά του, για τα τέσσερα πρώτα ίσα διαδοχικά χρονικά διαστήματα.

Το πείραμα του Γαλιλαίου: (μετάφραση από το: *Διάλογοι για δυο νέες επιστήμες*, (Galilei, 1954: 178, 179).

Σχόλιο: Η ανάπτυξη της θεωρίας και τα επιχειρήματα του Γαλιλαίου περιγράφονται στο βιβλίο του υπό μορφή διαλόγων μεταξύ τριών προσώπων, των: Salviati (παρουσιάζει τις απόψεις του Γαλιλαίου – συγγραφέα), Sagredo (αντικειμενικός συνομιλητής) και Simplicio (δύσπιστος συνομιλητής). Στο σημείο αυτό, του πειράματος, έχουν προηγηθεί δυο μαθηματικές αποδείξεις του Θεωρήματος ΙΙ και του πορίσματος. Η πρώτη του συγγραφέα (Γαλιλαίου), δυσκολεύει τον Simplicio, ενώ η δεύτερη που δίνεται από τον Sagredo, τον πείθει….

Σημειώστε ότι το παρακάτω σχήμα είναι υποβοηθητικό και δεν περιέχεται στο κείμενο του Γαλιλαίου που ακολουθεί. (σχ. 5)

Σχήμα 5



*« …**SIMPL.**: Στην πραγματικότητα βρίσκω μεγαλύτερη ικανοποίηση από αυτόν τον απλό και καθαρό ισχυρισμό του Sagredo, παρά στην απόδειξη του συγγραφέα, η οποία μου φαίνεται μάλλον δυσνόητη. Έτσι πείθομαι ότι τα ζητήματα είναι όπως περιγράφηκαν, άπαξ και έχουμε δεχτεί τον ορισμό της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Αλλά κατά πόσο αυτή η επιτάχυνση, είναι εκείνη που συναντά κάποιος στη φύση, στην περίπτωση της πτώσης των σωμάτων, ακόμα αμφιβάλλω. Και μου φαίνεται, όχι μόνο για χατίρι μου, αλλά για όλους όσοι σκέφτονται όπως εγώ, ότι την κατάλληλη στιγμή θα πρέπει να παρουσιάσεις ένα από εκείνα τα πειράματα – και καταλαβαίνω πως υπάρχουν πολλά τέτοια – το οποίο να περιγράφει με διάφορους τρόπους τα συναγόμενα συμπεράσματα».*

*«**SALV.**: Το αίτημα που υποβάλλεις ως άνθρωπος της επιστήμης είναι εύλογο. Διότι έτσι πρέπει να συμβαίνει σε εκείνες τις επιστήμες όπου οι μαθηματικές αποδείξεις εφαρμόζονται σε φυσικά φαινόμενα, όπως φαίνεται στην περίπτωση της αστρονομίας, της μηχανικής, της μουσικής κ. ά., οι αρχές των οποίων, κατ' αρχήν θεμελιώνονται μέσω καλά επιλεγμένων πειραμάτων, και επιτυγχάνεται η θεμελίωση όλου του εποικοδομήματος. Ελπίζω ωστόσο, ότι δεν θα σπαταλήσω το χρόνο αν συζητήσουμε επί μακρόν, αυτήν την πρώτη και ιδιαίτερα θεμελιώδη ερώτηση από την οποία εξαρτώνται πάμπολλες συνέπειες από τις οποίες έχουμε στο παρόν βιβλίο, μόνο ένα μικρό αριθμό…. Έχω προσπαθήσει να βεβαιωθώ με τον παρακάτω τρόπο, ότι η επιτάχυνση η οποία βιώνεται στην πραγματικότητα μέσω της πτώσης των σωμάτων, είναι αυτή που περιγράφηκε παραπάνω».*

«Πήραμε ένα κομμάτι ξύλινο καλούπι ή καδρόνι, περίπου 12 πήχεις μακρύ, μισό πήχη πλάτος, και τρία δάχτυλα πάχος. Στη μια άκρη του [κατά μήκος του καδρονιού], σκαλίστηκε ένα αυλάκι λίγο περισσότερο από ένα δάκτυλο πλάτος. Έχοντας κατασκευάσει αυτό το αυλάκι εντελώς ίσιο, λείο και γυαλισμένο και έχοντάς το φοδράρει με περγαμηνή, επίσης όσο λεία και γυαλισμένη είναι δυνατόν, αφήσαμε να κυλήσει κατά μήκος του μια σκληρή, λεία και απολύτως σφαιρική μπρούτζινη σφαίρα. Έχοντας τοποθετήσει αυτή τη σανίδα σε μια κεκλιμένη θέση, ανυψώνοντας ένα από τα άκρα της ένα ή δυο πήχεις πάνω από το άλλο, κυλήσαμε τη σφαίρα, όπως μόλις είπα, κατά μήκος του καναλιού, σημειώνοντας, με τον τρόπο που θα περιγράψουμε σε λίγο, το χρόνο που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί η κάθοδος. Επαναλαμβάνουμε αυτό το πείραμα περισσότερες από μία φορά προκειμένου να μετρήσουμε το χρόνο με μια ακρίβεια τέτοια, ώστε η απόκλιση μεταξύ δυο παρατηρήσεων ποτέ να μη ξεπερνάει το ένα δέκατο ενός καρδιακού παλμού. Έχοντας εκτελέσει αυτό το πείραμα και έχοντας βεβαιωθεί για την αξιοπιστία του, τώρα κυλίουμε τη σφαίρα μόνο στο ένα τέταρτο του μήκους του καναλιού. Μετράμε το χρόνο καθόδου και τον βρίσκουμε ακριβώς μισό του προηγούμενου [χρόνου]. Εξακολουθούμε να δοκιμάζουμε άλλες αποστάσεις, συγκρίνοντας το χρόνο όλου του μήκους με εκείνον του μισού μήκους, ή με εκείνον των δύο τρίτων, ή των τριών τετάρτων, ή ακόμα για οποιοδήποτε κλάσμα. Σε τέτοια πειράματα, επαναλαμβανόμενα τουλάχιστον εκατό φορές, πάντα βρίσκουμε ότι οι αποστάσεις που διανύονται είναι μεταξύ τους [έχουν λόγο]*, όπως τα τετράγωνα των χρόνων, και αυτό είναι αληθές για όλες τις κλίσεις του επιπέδου, δηλ, του καναλιού, κατά μήκος του οποίου κυλήσαμε τη σφαίρα. Επίσης παρατηρήσαμε ότι οι χρόνοι καθόδου, για διάφορες κλίσεις του επιπέδου, έχουν μεταξύ τους ακριβώς εκείνο το λόγο τον οποίο όπως θα δούμε αργότερα, ο συγγραφέας είχε προβλέψει και αποδείξει για αυτόν».*

«Για την μέτρηση του χρόνου, χρησιμοποιήσαμε ένα μεγάλο δοχείο νερού τοποθετημένο σε μια ανυψωμένη θέση. Στον πυθμένα αυτού του δοχείου ήταν συγκολλημένος ένας σωλήνας μικρής διαμέτρου ο οποίος παρείχε ένα λεπτό πίδακα νερού, το οποίο συλλέγαμε σε ένα μικρό ποτήρι κατά τη διάρκεια κάθε καθόδου, είτε για όλο το μήκος του καναλιού, ή για ένα τμήμα αυτού του μήκους. Το νερό που συλλέχτηκε μ' αυτό τον τρόπο ζυγίστηκε μετά από κάθε κάθοδο, με ένα ζυγό ακριβείας. Οι διαφορές και οι λόγοι αυτών των βαρών μας έδωσαν τις διαφορές και τους λόγους των χρόνων, και αυτά με τέτοια ακρίβεια, που μολονότι το πείραμα επαναλήφθηκε πάρα πολλές φορές, δεν υπήρξε αξιόλογη απόκλιση στα αποτελέσματα».

*«**SIMPL.**: Θα ήθελα να ήμουν παρών σ' αυτά τα πειράματα, αλλά δείχνοντας εμπιστοσύνη στο ενδιαφέρον με το οποίο μας τα αναπαριστάς, και στην ακρίβεια*

με την οποία τα συσχετίζεις, είμαι ικανοποιημένος και τα δέχομαι ως αληθή και έγκυρα»....

....

Ερώτηση προς τους φοιτητές: Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι με αυτό το πείραμα ο Γαλιλαίος αποδεικνύει ότι η ελεύθερη πτώση των σωμάτων είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Από προηγούμενες δραστηριότητες, οι φοιτητές γνωρίζουν ότι η διανυόμενη απόσταση στα προβλήματα κίνησης αναπαρίσταται από το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της ταχύτητας.

Θέλουμε από τους φοιτητές:

α) Να αποδείξουν ότι $S(t) = (1/2)at^2$, από το γράφημα της ταχύτητας $U(t) = at$.

β) Να αποδειχθεί ότι $S_1/ 1 = S_2/ 3 = S_3/ 5 = S_4/7$, αν η χρονική διάρκεια της κίνησης διαιρεθεί σε τέσσερα ίσα διαστήματα.

γ) Να αξιολογήσουν τη σημασία της μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων, τη σημασία των μαθηματικών συμπερασμάτων στην ερμηνεία των φυσικών νόμων της κίνησης και να συζητηθεί η σχέση ταχύτητας – μετατόπισης υπό το πρίσμα του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού του οποίου την τυπική απόδειξη έχουν διδαχθεί στο β′ εξάμηνο του πρώτου έτους στο Μαθηματικό Τμήμα.

4.2. *Από το φύλλο εργασίας δύο φοιτητών που εργάσθηκαν με τη δραστηριότητα του «Γαλιλαίου»* (εικόνες 1, 2, 3)

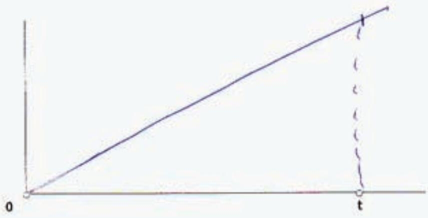
Παραθέτουμε ενδεικτικά ένα φύλλο εργασίας και τη συνέντευξη που ακολούθησε προκειμένου να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο προσέγγισαν το πείραμα.

Το φύλλο εργασίας των Παναγιώτη και Βαγγέλη:

Εικόνα 1

Α). Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα πέφτει ελεύθερα υπό την επίδραση του βάρους του. Σας ζητάει να σχεδιάσετε, με δεδομένο τον ισχυρισμό του, το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο για την κίνηση αυτή.

(Θεωρήστε χρονικό διάστημα [0, t]).



Β). Σας ζητάει να υπολογίσετε τη μετατόπιση ως συνάρτηση του t. (Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης θέσεως του σώματος)

$$\left.\begin{array}{l} S(t) = \frac{1}{2} t \cdot \upsilon(t) \\ \upsilon(t) = c \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow S(t) = \frac{1}{2} c \cdot t^2$$

(υ-t ανάλογα)

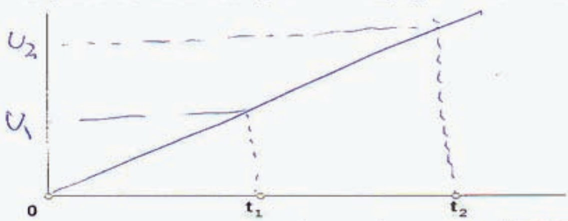
(c : επιτάχυνση)

Εικόνα 2

<u>Θεώρημα I I</u> (Στην «φυσικά» επιταχυνόμενη κίνηση)

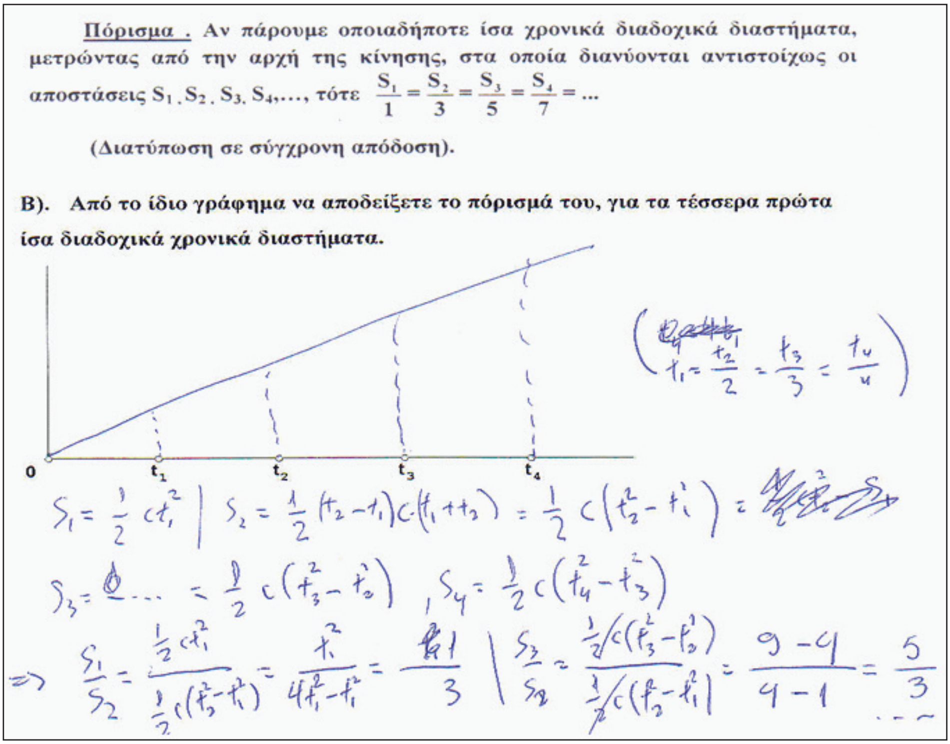
Οι αποστάσεις που διανύονται από ένα σώμα που πέφτει (κατέρχεται), [εκκινώντας] από την ηρεμία, με μια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των χρονικών διαστημάτων που χρειάζονται για να διανυθούν αυτές οι αποστάσεις.

Α). Από το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο που κατασκευάσατε παραπάνω, να αποδείξετε το Θεώρημα I I του Γαλιλαίου.



$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2} c t_1^2 \\ S_2 = \frac{1}{2} c \cdot t_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}}$$

Εικόνα 3


Πόρισμα . Αν πάρουμε οποιαδήποτε ίσα χρονικά διαδοχικά διαστήματα, μετρώντας από την αρχή της κίνησης, στα οποία διανύονται αντιστοίχως οι αποστάσεις $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$, τότε $\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \frac{S_4}{7} = \ldots$

(Διατύπωση σε σύγχρονη απόδοση).

Β). Από το ίδιο γράφημα να αποδείξετε το πόρισμά του, για τα τέσσερα πρώτα ίσα διαδοχικά χρονικά διαστήματα.

4.3. Η συζήτηση με τον Παναγιώτη και τον Βαγγέλη (ένα τμήμα της συνέντευξης):

(1) **Ερευνητής:** Ο Γαλιλαίος ισχυρίζεται ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, κατά την πτώση των σωμάτων. Ο ίδιος λέει ότι αυτό το αποδεικνύει. Κατ' αρχήν να θυμηθούμε τον ορισμό της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης εκείνης της εποχής. Ομαλά επιταχυνόμενη είναι η κίνηση εκείνη κατά την οποία σε οποιαδήποτε ίσα χρονικά διαστήματα έχω ίσες αυξήσεις της ταχύτητας.

(2) **Βαγγέλης:** Κατά Merton College.

(3) **Ερ.:** Ο Γαλιλαίος με αυτό τον ισχυρισμό προχωρεί και κατασκευάζει μια μαθηματική θεωρία. Συνεπώς, αν πέφτει το σώμα υπό την επίδραση του βάρους, ζητείται να σχεδιάσετε το γράφημα της ταχύτητας.

(4) **Παναγιώτης:** Ναι είναι γραμμική συνάρτηση, όπως και στις προηγούμενες δραστηριότητες που είχαμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

(5) **Ερ.:** Με βάση αυτό, σας ζητάει να υπολογίσετε τη μετατόπιση.

(6) **Βαγγ.:** Το εμβαδόν στο γράφημα της ταχύτητας είναι η μετατόπιση.

(7) **Ερ.:** Διατυπώνει λοιπόν εδώ, ένα θεώρημά του για τη κίνηση αυτή, και αν S_1 και S_2 είναι δυο μετατοπίσεις σε αντίστοιχους χρόνους t_1 και t_2, τότε ισχύει ότι $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$.

(8) **Βαγγ.:** Ναι, στην ελεύθερη πτώση.

(9) **Ερ.:** Είτε στην ελεύθερη πτώση, είτε στην κάθοδο σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση μιας σταθερής δύναμης του βάρους. Είναι η ίδια κίνηση. Απλώς πάει στο κεκλιμένο επίπεδο για να κάνει προσομοίωση της ελεύθερης πτώσης.

(10) **Παν.:** Για να πάει πιο αργά το σώμα.

(11) **Ερ.:** Ναι, και να μπορεί να μετρήσει. Βλέπω ότι το θεώρημα αυτό το αποδεικνύετε στο γράφημα που έχετε κάνει.

(12) **Βαγγ., Παν.:** Ναι, ναι.

(13) **Ερ.:** Άρα μαθηματικά, δεν υπάρχει δυσκολία να αποδείξετε το θεώρημα με το γράφημα που κάνατε. Αυτός δεν έχει γράφημα εκείνη την εποχή, χρησιμοποιεί θεωρία λόγων του Ευκλείδη. Εδώ βγαίνει ένα πόρισμα από το θεώρημα αυτό, που λέει ότι οι διανυόμενες αποστάσεις σ' αυτές εδώ τις διαδοχικές ίσες χρονικές περιόδους, έχουν λόγο όπως οι αριθμοί 1, 3, 5, 7,... Και εδώ ζητείται απόδειξη. Έγινε η απόδειξη;

(14) **Παν.:** Ναι, ναι.... Το S_1 είναι το εμβαδόν του τριγώνου αυτού, το S_2 το εμβαδόν του τριγώνου αυτού. Διαιρέσαμε κατά μέλη, είπαμε ότι το t_2 είναι $2t_1$, το t_3 είναι $3t_1$, κλπ. Και εύκολα βγαίνει. *(Δείχνει τα τρίγωνα στο φύλλο εργασίας).*

(15) **Ερ.:** Αυτά τα επεξεργάζεται με μαθηματικό τρόπο ο Γαλιλαίος και καταλήγει στο πόρισμα. Με το θεώρημα αυτό ο Γαλιλαίος έχει αποδείξει τη δευτεροβάθμια σχέση μετατόπισης και χρόνου. Εδώ υπάρχει το πείραμα σε μετάφραση από το πρωτότυπο. Και φαίνεται τι ακριβώς διαμείβεται μεταξύ των συνομιλητών. Ο Γαλιλαίος εκθέτει τις απόψεις του μέσα από διαλόγους κάποιων συνομιλητών. Ένας είναι αυτός που υποστηρίζει τη θεωρία του και τον ίδιο, ένας άλλος είναι ο δύσπιστος που ζητάει κάθε φορά αποδείξεις, και ένας είναι αντικειμενικός παρατηρητής. Κάνει λοιπόν το πείραμα.

(16) **Βαγγ.:** Αυτό με τη μπάλα.

(17) **Ερ.:** Ναι, με το κεκλιμένο επίπεδο...

(18) **Παναγ.:** Που μετράει χρόνους με το δοχείο.

(19) **Ερ.:** Ναι, μετράει βάρη και υπολογίζει χρόνους. Η ερώτηση ποια είναι; Μπορώ να ισχυριστώ ότι ο Γαλιλαίος μ' αυτό το πείραμα αποδεικνύει ότι η ελεύθερη πτώση των σωμάτων είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση;

(20) **Παν.:** Εγώ πιστεύω ότι αυτό βγαίνει, γιατί αποδεικνύει πειραματικά αυτό που μας λέει. Ότι $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$, γιατί μετράει τους χρόνους.

(21) **Ερ.:** Όμως εδώ δεν έχουμε ταχύτητες. Μετράει αποστάσεις και χρόνους. Πώς βγαίνει συμπέρασμα για τη ταχύτητα;

(22) **Παν.:** Έχει αποδείξει ότι η σχέση $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$ ισχύει όταν έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

(23) **Ερ.:** Άρα από την ταχύτητα που πάει;

(24) **Βαγγ.:** Στις αποστάσεις.

(25) **Ερ.:** Και αποδεικνύει;

(26) **Παν.:** Το θεώρημα, τη σχέση $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$.

(27) **Ερ.:** Πώς μπορώ να βγάλω τότε συμπέρασμα ότι αποδεικνύει τον ισχυρισμό του για την ταχύτητα;

(28) **Βαγγ.:** Έκανε το πείραμα με το κεκλιμένο επίπεδο και έδειξε ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη;

(29) **Παν.:** Κάνοντας το πείραμα και μετρώντας τους αντίστοιχους χρόνους και τις αποστάσεις, επαληθεύει αυτά που έχει αποδείξει.

(30) **Ερ.:** Θα προσπαθήσω να σας κατευθύνω λίγο. Ισχυρίζεται ότι η ταχύτητα είναι U = at. Έχει την ταχύτητα ότι είναι έτσι. Με μαθηματικό τρόπο πάει στη μετατόπιση, δηλ. πάει σε μια άλλη συνάρτηση. Στη συνάρτηση της μετατόπισης ως προς το χρόνο και αποδεικνύει και μαθηματικά και πειραματικά τη σχέση της μετατόπισης με το χρόνο. Δηλ. από μια συνάρτηση, πάει σε μια άλλη, όπου εκεί αποδεικνύει τη σχέση που ισχύει. Το ερώτημα που συζητάμε είναι, πώς από αυτό εδώ βγάζει συμπέρασμα για τον αρχικό ισχυρισμό του; Βλέπετε κάποια συσχέτιση με ότι έχουμε κάνει μέχρι τώρα;

(31) **Παν., Βαγγ.:** .... *(παύση)*

(32) **Ερ.:** Έχουμε τη συνάρτηση της ταχύτητας. Πάμε στο ολοκλήρωμα που είναι η μετατόπιση. Πειραματίζεται στο ολοκλήρωμα, στη σχέση $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$, προκειμένου να αποδείξει, λέω εγώ, τον ισχυρισμό του ότι η πτώση είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Γιατί πειραματίζεται στο ολοκλήρωμα; Γιατί μπορεί να μετρήσει χρόνους και αποστάσεις. Δεν μπορεί εκείνη την εποχή να μετρήσει ταχύτητες. Παρατηρεί όμως μια στενή αλληλεξάρτηση μεταξύ των δύο συναρτήσεων, της ταχύτητας με τη μετατόπιση και συμπεραίνει ότι από την σχέση U = at, έπεται η $S = (1/2)at^2$, και εγώ λέω, και αντιστρόφως. Δηλ., για να αποφανθεί ότι η υπό-

θεσή του είναι σωστή, πρέπει από την $S = (1/2)at^2$ να οδηγηθεί στην $U = at$. Αυτό λέει, κατ' ουσίαν στο διάλογο....

(33) **Παν.:** Όμως μαθηματικά απέδειξε ότι αν $U = at$, τότε $S = (1/2)at^2$ και όχι το αντίστροφο.

5. Παρατηρήσεις – συμπεράσματα σχετικές με τη δραστηριότητα 'Galileo Galilei'

Οι φοιτητές έχουν αποδείξει εύκολα το θεώρημα και το πόρισμα του Γαλιλαίου, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, το γράφημα της ταχύτητας και τους λόγους εμβαδών των τριγώνων που αναπαριστούν τις αντίστοιχες μετατοπίσεις. Η απόδειξη, με σύγχρονο συμβολισμό, των σχετικών προτάσεων τους οδηγεί αβίαστα στο συμπέρασμα ότι «αν η ταχύτητα είναι ανάλογη του χρόνου τότε η διανυόμενη απόσταση είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου». Η προσπάθεια του ερευνητή (όπως φαίνεται από το απόσπασμα στην παραπάνω συνέντευξη) να τους οδηγήσει στην ισοδυναμία υπόθεσης και συμπεράσματος μέσω του Θεμελιώδους Θεωρήματος, δεν στάθηκε αρκετή να τους προσανατολίσει στην αναζήτηση της αντίστροφης πορείας. Είναι ενδεχόμενο να μη γίνεται κατανοητό από τους φοιτητές ότι μπορεί να συζητάμε για 'πειραματική' επιβεβαίωση ή όχι ενός μαθηματικού θεωρήματος.

Γενικότερα, σχετικά με τις νοητικές λειτουργίες των φοιτητών που έλαβαν μέρος στη δραστηριότητα που σχετίζεται με το πείραμα του Γαλιλαίου στο κεκλιμένο επίπεδο, έχουμε να σημειώσουμε τα εξής:

(α) Οι φοιτητές δε δυσκολεύθηκαν να αποδείξουν το 2ο θεώρημα του Γαλιλαίου σχετικά με την *'φυσικά'* επιταχυνόμενη κίνηση, χρησιμοποιώντας λόγους εμβαδών των ορθογωνίων τριγώνων που αναπαριστούν την κίνηση στο γράφημα της ταχύτητας-χρόνου.

(β) Λιγότεροι φοιτητές απέδειξαν το πόρισμα, παίρνοντας λόγους εμβαδών ευθύγραμμων σχημάτων στο γράφημα ταχύτητας – χρόνου.

(γ) Οι φοιτητές κατανόησαν ότι με δεδομένη την υπόθεση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης και της επαγόμενης γραμμικής συνάρτησης της ταχύτητας, προκύπτει η δευτεροβάθμια σχέση μετατόπισης– χρόνου. Ωστόσο, δεν κατάφεραν να ακολουθήσουν μια αντίστροφη πορεία συλλογισμών μέσω του κειμένου των διαλόγων από το βιβλίου του Γαλιλαίου, ώστε να απαντήσουν θετικά στην ερώτηση η οποία τέθηκε στο τέλος της δραστηριότητας, αν «μπορούμε να ισχυριστούμε ότι με αυτό το πείραμα ο Γαλιλαίος αποδεικνύει ότι η ελεύθερη πτώση των σωμάτων είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση;». Οι φοιτητές δεν κατάφεραν να προσεγγίσουν την ουσία του θεμελιώδους θεωρήματος, που κατά τη γνώμη μας βρίσκεται στο διάλογο. Θεωρούμε ότι το κείμενο του Γαλιλαίου το οποίο αφορά στην ομαλή και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση *(‘Τρίτη ημέρα’* από το *Διάλογοι για δύο νέες επιστήμες*, Galilei, 1954) μπορεί να αποτελέσει υλικό σχεδιασμού δραστηριοτήτων με στόχους: (α) να εισαχθούν οι φοιτητές στη επιστημονική μέθοδο μαθηματικής μελέτης της φύσης από τον Γαλιλαίο, και (β) μέσω αυτής, στην προσέγγιση του Θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού. Απαιτείται περαιτέρω έρευνα ως προς τους στόχους, το σχεδιασμό και την πειραματική εφαρμογή της πρότασης.

Παράρτημα

Θεώρημα II, Πρόταση II. (Galilei, 1954: 174)

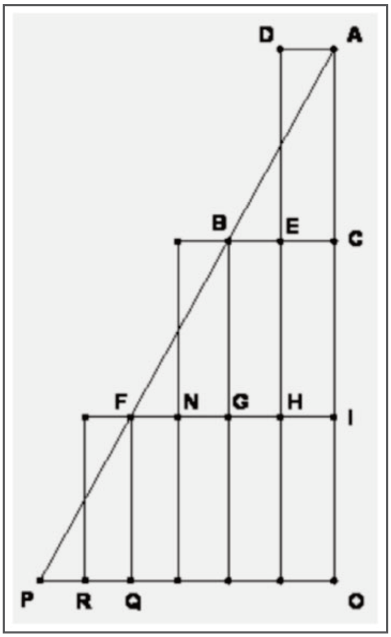
«Οι αποστάσεις που διανύονται από ένα σώμα που πέφτει με μια ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση [εκκινώντας] από την ηρεμία, είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των χρονικών διαστημάτων που απαιτούνται προκειμένου να διανυθούν αυτές οι αποστάσεις».

....

(Galilei, 1954: 176):

«SAGR.: Παρακαλώ διακόψτε τη συζήτηση προς στιγμήν, διότι μόλις μου πέρασε από το μυαλό μια ιδέα την οποία θέλω να περιγράψω μέσω ενός διαγράμματος, προκειμένου να γίνει καθαρότερη σε σας και σε μένα.

Σχήμα 6



Έστω ότι η γραμμή AI αναπαριστά την πάροδο του χρόνου που μετράται από την αρχική στιγμή A. Από το A σχεδιάστε την ευθεία AF σχηματίζοντας οποιαδήποτε γωνία (σχ.6). Ενώστε τα τελικά σημεία I και F, διαιρέστε το χρόνο AI στο μισό με το C, σχεδιάστε την CB παράλληλη προς την IF. Ας θεωρήσουμε τη CB ως τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας η οποία αυξάνει από το μηδέν στην αρχή, σε απλή αναλογία προς τις τομές στο τρίγωνο ABC των γραμμών που άγονται παράλληλα προς την BC, ή πράγμα που είναι το ίδιο, ας υποθέσουμε (υπογράμμιση δική μου, Θ.Π.) *ότι η ταχύτητα αυξάνει ανάλογα προς το χρόνο. Τότε δέχομαι αναντίρρητα, από τη σκοπιά του προηγούμενου επιχειρήματος, ότι η διανυόμενη απόσταση από ένα σώμα που πέφτει με τον προαναφερθέντα τρόπο θα είναι ίση προς τη διανυόμενη απόσταση από το ίδιο σώμα το οποίο κι-*

νείται με σταθερή ταχύτητα ίση προς EC, τη μισή προς την BC, κατά τη διάρκεια του ίδιου χρονικού διαστήματος.

Επιπλέον ας φανταστούμε ότι το σώμα έχει πέσει με επιταχυνόμενη κίνηση έτσι ώστε, τη στιγμή C να έχει ταχύτητα BC.

Είναι καθαρό ότι αν το σώμα συνεχίζει να κατέρχεται με την ίδια ταχύτητα BC, χωρίς επιτάχυνση, θα διανύσει στο επόμενο χρονικό διάστημα CI, διπλάσια απόσταση από εκείνη που διανύθηκε στο χρονικό διάστημα AC, με ομαλή ταχύτητα EC η οποία είναι μισή της BC. Αλλά εφ' όσον το σώμα που πέφτει, αποκτά ίσες αυξήσεις ταχύτητας κατά τη διάρκεια ίσων αυξήσεων του χρόνου, έπεται ότι η ταχύτητα BC κατά τη διάρκεια του επόμενου χρονικού διαστήματος CI, θα αυξηθεί κατά μια ποσότητα που αναπαρίσταται από τις παράλληλες του τριγώνου BEG το οποίο είναι ίσο προς το τρίγωνο ABC. Αν τότε, κάποιος προσθέσει στη ταχύτητα GI το μισό της ταχύτητας FG, η μέγιστη ταχύτητα που αποκτάται από την επιταχυνόμενη κίνηση και ορίζεται από τις παράλληλες του τριγώνου BFG, θα έχει την ομοιόμορφη ταχύτητα με την οποία η ίδια απόσταση θα είχε διανυθεί στο χρόνο CI. Και εφ' όσον αυτή η ταχύτητα IN είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από την EC, έπεται ότι η διανυόμενη απόσταση κατά τη διάρκεια του [χρονικού] διαστήματος CI είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από εκείνη που διανύεται κατά τη διάρκεια του διαστήματος AC. Ας φανταστούμε την κίνηση να εξελίσσεται περαιτέρω σ' ένα άλλο ίσο χρονικό διάστημα IO, και το τρίγωνο επεκτείνεται στο APO. Είναι τότε γεγονός ότι αν η κίνηση συνεχίζεται κατά τη διάρκεια του διαστήματος IO, με το σταθερό ρυθμό IF που αποκτήθηκε μέσω της επιτάχυνσης κατά τη διάρκεια του χρόνου AI, η διανυόμενη απόσταση κατά τη διάρκεια του διαστήματος IO θα είναι τετραπλάσια εκείνης που διανύθηκε στη διάρκεια του πρώτου [χρονικού] διαστήματος AC, διότι η ταχύτητα IF είναι τετραπλάσια της ταχύτητας EC. Αλλά αν μεγαλώσουμε το τρίγωνό μας έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε το FPQ το οποίο ισούται με το ABC, θεωρώντας ακόμα ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή, θα προσθέσουμε στην ομοιόμορφη ταχύτητα μια αύξηση RQ, ίση προς την EC. Τότε η τιμή της ισοδύναμης ομοιόμορφης ταχύτητας κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος IO θα είναι πενταπλάσια από εκείνη του πρώτου χρονικού διαστήματος AC. Γι' αυτό η διανυόμενη απόσταση θα είναι πενταπλάσια από εκείνη του πρώτου διαστήματος AC. Έτσι, είναι γεγονός, με απλό υπολογισμό ότι ένα κινούμενο σώμα το οποίο εκκινεί από την ηρεμία και αποκτά ταχύτητα με ένα ρυθμό ανάλογο προς το χρόνο, θα διανύσει, κατά τη διάρκεια ίσων χρονικών περιόδων, αποστάσεις που σχετίζονται μεταξύ τους όπως οι περιττοί αριθμοί ξεκινώντας από τη μονάδα, 1, 3, 5, …, ή θεωρώντας τη συνολική διανυόμενη απόσταση η οποία διανύεται σε διπλάσιο χρόνο θα είναι τετραπλάσια από εκείνη που διανύθηκε στη διάρκεια του μοναδιαίου χρόνου, σε τριπλάσιο χρόνο, η απόσταση είναι 9-πλάσια από εκείνη που διανύθηκε στο μοναδιαίο χρόνο. Και γενικά οι αποστάσεις που διανύθηκαν έχουν λόγο ίσο προς το τετράγωνο του λόγου των [αντίστοιχων] χρόνων».

(Δηλ. $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2$, Θ.Π).

Σχολιάζοντας το κείμενο αυτό, έχουμε να παρατηρήσουμε:

1. Χρησιμοποιώντας τη σύγχρονη θεμελιώδη εξίσωση S = ½ gt^2, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας το θεώρημα προκύπτει άμεσα: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_2^2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$.

   Το πόρισμα : S = ½ $g(t_2^2 - t_1^2)$ = ½ $g(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)$, με $t_2 - t_1 = 1$ (t_1, t_2 διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί) και $t_2 + t_1$ πάντα περιττός αριθμός.
2. Είναι χαρακτηριστική η απλότητα με την οποία αποδεικνύει το θεώρημα και το πόρισμα σ' αυτό το απόσπασμα, προσφεύγοντας μέσω του θεωρήματος μέσης τιμής στις αντίστοιχες ομαλές κινήσεις. Η αναπαράσταση χρόνου – ταχύτητας, παρ' ότι μοιάζει με εκείνην του Oresme, χρησιμοποιείται μόνο για την εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής. Με χρονικά διαδοχικά διαστήματα σταθερά, σύμφωνα με την 2η πρότασή του στην ομαλή κίνηση: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{U_1}{U_2}$, και επειδή στο τέλος των αντίστοιχων ίσων χρονικών διαστημάτων ισχύει: $U_2 = 3U_1$, $U_3 = 5U_1$, $U_4 = 7U_1$, κοκ., με U_1 = BC/2, έπεται ότι $\frac{S_1}{1}=\frac{S_2}{3}=\frac{S_3}{5}=\frac{S_4}{7}= \ldots$
3. Στην τελευταία παράγραφο του κειμένου του, ο Γαλιλαίος αναφέρεται έμμεσα στη σειρά 1+3+5+ ... + 2ν-1 = $ν^2$, την οποία συνδέει με το πόρισμα το οποίο με τη σειρά του προκύπτει από το θεώρημα της μέσης τιμής (Edwards, 1979: 90).

Βιβλιογραφία

Boyer, C. (1959) *The history of the Calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications, Inc.

Clagett, M. (1959) *Science of Mechanics in the Middle Ages.* Madison: The University of Wisconsin Press.

Clagett, M. (1968) *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of qualities and motion.* Madison: The University of Wisconsin Press.

Crombie, A. C. (μετ. Ιατρίδου Μ., Κούρτοβικ, Δ) (1992) *Από τον Αυγουστίνο στον Γαλιλαίο,* τόμος Β: *Η Επιστήμη στο Ύστερο Μεσαίωνα και στις Αρχές των Νέων Χρόνων (13ος – 17ος αιώνας)*, Αθήνα: Εκδόσεις Μορφωτικού Ιδρύματος Εθνικής Τράπεζας.

Edwards, H. C. (1979) *The Historical Development of the Calculus*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.

Farmaki, V. & T. Paschos (2007) Employing genetic 'moments' in the history of Mathematics in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 66 (1): 83-106.

Galilei Galileo (translation by Crew, H., Salvio, A.) (1954) *Dialogues Concerning Two New Science*. New York: Dover Publications, Inc; originally published in 1638.

Kaput, J. (1994) Democratizing Access to Calculus: New Routes to Old Roots. In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Assosiates, Inc. Publishers.

Paschos, T. & V. Farmaki (2007) The Integrating of genetic moments in the History of Mathematics and Physics in the designing of didactic activities aiming to introduce first-year undergraduates to concepts of Calculus. In Barbin, Stehlicova & Tzanakis (Eds), *History and Epistemology in Mathematics*. Prague: Proceedings of the 5th European Summer University, 297-310.

Πάσχος, Θ. (2007) *Ενσωμάτωση γενετικών στιγμών της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική προσέγγιση εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης*. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή, Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ.

Radford L., V. Katz, J-P.Dorier, O. Bekken & A. Sierpinska (2000) The role of historical analysis in predicting and interpreting students' difficulties in mathematics. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI study*. The Netherlands Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 149–154.

Σταμάτης, Ε. (1975) *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία*. (Τόμος Ι). Αθήνα: Οργανισμός εκδόσεων σχολικών βιβλίων.

Tzanakis, C., A. Arcavi et al. (2000) Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. The Netherlands Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 201-240.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΠΟΣΤΕΛΛΟΜΕΝΑ ΠΡΟΣ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ ΚΕΙΜΕΝΑ

Οι ενδιαφερόμενοι να δημοσιεύσουν άρθρα στο περιοδικό θα πρέπει να γνωρίζουν τα ακόλουθα:

1. Οι εργασίες που θα αποσταλούν θα πρέπει να είναι πρωτότυπες (να μην έχουν δημοσιευτεί ή αποσταλεί για δημοσίευση αλλού).
2. Θα πρέπει να έχουν έκταση μεταξύ 4.000 και 7.000 λέξεων μαζί με την περίληψη, τους πίνακες, τις εικόνες, τα παραρτήματα και τη βιβλιογραφία.
3. Θα πρέπει να συνοδεύονται από *περίληψη* 100-150 λέξεων (α) στην αγγλική, γαλλική ή γερμανική γλώσσα και (β) στην ελληνική γλώσσα, καθώς και από 5-6 λέξεις-κλειδιά (βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στην εργασία).
4. Επίσης, θα πρέπει να συνοδεύονται -σε **ξεχωριστό αρχείο**- από τα στοιχεία επικοινωνίας τουλάχιστον ενός από τους συγγραφείς (διεύθυνση επικοινωνίας, τηλέφωνο, ηλεκτρονική διεύθυνση) καθώς και από την ιδιότητα των συγγραφέων και το ίδρυμα με το οποίο **ενδεχομένως** συνεργάζονται (λ.χ. Αναπλ. Καθηγητής Δ.Π.Θ., Σχολικός Σύμβουλος Ν. Χανίων, Φιλόλογος- Υποψήφιος Διδάκτορας Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, κ.ο.κ.).
5. Εάν το κείμενο περιλαμβάνει Πίνακες, Διαγράμματα, Σχήματα κ.λπ., αυτά θα πρέπει να υποβάλλονται σε **ξεχωριστό αρχείο** και να υποδεικνύεται σαφώς η θέση τους μέσα στο κείμενο. Η αρίθμησή τους θα γίνεται διαδοχικά και οι πίνακες θα συνοδεύονται από τις κατάλληλες επικεφαλίδες.
6. Τυχόν Παραρτήματα υποβάλλονται επίσης σε ξεχωριστό αρχείο.

Τα κείμενα προς δημοσίευση αποστέλλονται **στην Ηλεκτρονική Διεύθυνση** του περιοδικού (EPISAGO@edc.uoc.gr) σε δύο (2) αρχεία. Το ένα αρχείο θα φέρει τα στοιχεία του συγγραφέα (ονοματεπώνυμο, ιδιότητα, διεύθυνση, τηλέφωνο και ηλεκτρονικό ταχυδρομείο) και το άλλο θα είναι ανώνυμο, ώστε να αποστέλλεται στους αρμόδιους κριτές. Οι συγγραφείς θα ειδοποιούνται **με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο για την παραλαβή της εργασίας τους** και μόλις το περιοδικό ενημερωθεί από τους κριτές για εάν η εργασία είναι δημοσιεύσιμη και εάν απαιτούνται κάποιες αλλαγές.

Οδηγίες για τη διαμόρφωση του κειμένου

Τα κείμενα που υποβάλλονται θα πρέπει να είναι γραμμένα σε ενάμισυ διάστιχο και μόνο στη μία πλευρά της σελίδας, με περιθώρια 3 εκατοστά σε όλες τις πλευρές.

Ο τίτλος του κειμένου δε θα πρέπει να υπερβαίνει τις 10 λέξεις και δεν θα πρέπει επίσης να περιέχει συντομογραφίες. Εάν οι συγγραφείς κάνουν χρήση συντομογραφιών στο κείμενο, θα πρέπει την πρώτη φορά να τις εμφανίζουν αναλυμένες και να δίνουν τη συντομογραφία σε παρένθεση.

Για τη διευκόλυνση της ανάγνωσης του άρθρου θα πρέπει να γίνεται αρίθμηση κεφαλαίων, υποκεφαλαίων, παραγράφων κ.τ.λ. με αραβικούς αριθμούς ξεκινώντας από το 0 για την Εισαγωγή, εάν υπάρχει.

Ο τίτλος των κεφαλαίων γράφεται με έντονα πεζά (λ.χ. **3. Μεθοδολογία της έρευνας**), των υποκεφαλαίων με έντονα πλάγια (***3.1. Δείγμα και διαδικασία συλλογής δεδομένων***) και των επιμέρους υποκεφαλαίων με σκέτα πλάγια (1.1.1.,1.1.2, κ.ο.κ.)

Οι συγγραφείς παρακαλούνται να είναι συνεπείς ως προς τη χρήση των σημείων στίξης. Τα διπλά εισαγωγικά (''...'') χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν παράθεμα από έργο συγγραφέα. Όταν αυτό ξεπερνά τις τρεις σειρές κειμένου, πρέπει να γράφεται χωριστά, μέσα σε διπλά εισαγωγικά, με μεγαλύτερα διαστήματα δεξιά και αριστερά από ό,τι το κανονικό κείμενο, και με πλήρη αναφορά στην πηγή. Τα μονά εισαγωγικά ('...') μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δηλώσουν μη κοινά αποδεκτή ή μεταφορική χρήση (λ.χ. ''πρόκειται για έναν μαθητή 'αστέρι'...'') ή αναφορά σε λέξη, έκφραση, κλπ. (λ.χ. ''το μόρφημα 'παν' μπορεί επίσης να υποδηλώνει ...''). Τα πλάγια γράμματα (italics) χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν είτε έμφαση είτε κάποιον όρο. Τα έντονα γράμματα χρησιμοποιούνται μόνο για τους τίτλους και για τις ονομασίες των Πινάκων, Σχημάτων κλπ. (Πίνακας 3, Σχήμα 2, Διάγραμμα 1,) και οι υπογραμμίσεις καθόλου. Τέλος, δε συνιστάται η χρήση των κεφαλαίων μέσα στο κείμενο ή στις βιβλιογραφικές παραπομπές.

Οι υποσημειώσεις θα πρέπει να αποφεύγονται. Εάν ο/η συγγραφέας θεωρεί απαραίτητη τη χρήση σημειώσεων, τότε αυτές θα πρέπει να μπαίνουν **υποσέλιδες** και όχι στο τέλος του κειμένου (Σημειώσεις τέλους).

Παραπομπές μέσα στο κείμενο

Οι παραπομπές - βιβλιογραφικές αναφορές- μέσα στο κείμενο θα πρέπει να γίνονται πάντοτε μέσα σε παρενθέσεις και να περιλαμβάνουν το επώνυμο του/της συγγραφέα και τη χρονολογία έκδοσης, ενδεχομένως και συγκεκριμένη σελίδα ή σελίδες (Τσουκαλάς, 1977: 35-6), (Πουλαντζάς, 1982), ''Σύμφωνα με τις Carrasquillo & Rodriguez (1996:27),..'', '' Όπως υποστηρίζει ο Halliday (1985:64-66)...''. Εάν οι συγγραφείς είναι περισσότεροι από δύο, τότε η παραπομπή μπαίνει με τη μορφή (Ευσταθιάδης κ.α. 1992) ή (Bimmel et al., 2000). Εάν οι πηγές σε μία παραπομπή είναι περισσότερες από μία, μπορούν να μπούν είτε σε αλφαβητική σειρά (Αλεξίου, 2000, Φραγκουδάκη & Δραγώνα 1997) είτε σε χρονολογική (Φραγκουδάκη & Δραγώνα 1997, Αλεξίου, 2000) με συστηματικό τρόπο, όμως, σε όλη την εργασία.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ο κατάλογος των βιβλιογραφικών αναφορών θα περιλαμβάνει το σύνολο των έργων στα οποία γίνεται παραπομπή μέσα στο κείμενο -και μόνον αυτά. Οι καταχωρήσεις θα γίνονται με αλφαβητική σειρά και στη συνέχεια με χρονολογική (εάν υπάρχουν περισσότερα έργα του ιδίου συγγραφέα). Όταν μία καταχώρηση αφορά περισσότερους από έναν συγγραφείς, τα αρχικά των ονομάτων όλων των συγγραφέων μετά τον πρώτο προηγούνται των επωνύμων τους. Περισσότερα του ενός αρχικά ονομάτων χωρίζονται με τελείες χωρίς διάστημα μεταξύ τους. Ενδεικτικά ακολουθούν παραδείγματα.

Α) Αναφορές σε βιβλία

Flanagan, I.C., W.M. Shanner & R.F. Mager (1971) Behavioural Objectives: A Guide for Individualizing Learning. New York: Westinghouse Learning Press.

Τερλεξής Π. (1976) Πολιτική Κοινωνικοποίηση. Η Γένεση του Πολιτικού Ανθρώπου, Αθήνα: Gutenberg.

Cummins, J. (μετ. Σ. Αργύρη, εισ. επιμ. Ε. Σκούρτου) (2003) Ταυτότητες υπό διαπραγμάτευση. Αθήνα: Gutenberg (2η έκδοση, βελτιωμένη).

Αν το βιβλίο έχει πραγματοποιήσει πολλές εκδόσεις, τότε μνημονεύεται η έκδοση που είχε υπόψη ο συγγραφέας (π.χ. 3η έκδ.) και αυτό αμέσως μετά τον εκδοτικό οίκο. Αν δεν υπάρχει εκδοτικός οίκος, γιατί είναι έκδοση του ίδιου του συγγραφέα, τότε στη θέση του εκδοτικού οίκου μπαίνει η συντομογραφία (εκδ. ίδιου) ή (έκδ. συγγρ.).

Β) Αναφορές σε άρθρα σε περιοδικά

Ματσαγγούρας, Η. & Α. Κουλουμπαρίτση (1999) Ένα πρόγραμμα διδασκαλίας της κριτικής σκέψης: θεωρητικές αρχές και εφαρμογές στην παραγωγή του γραπτού λόγου. Ψυχολογία, 6 (3): 299-326.

Shepard, L.A. (2000) The role of assessment in a learning culture. Educational Researcher, 29 (7): 4-14.

Γ) Αναφορές σε κεφάλαια σε συλλογικούς τόμους ή πρακτικά συνεδρίων

Ξανθάκου, Γ. & Μ. Μπάφα (2009) Οργάνωση του χώρου στο Νηπιαγωγείο και δημιουργικότητα. Στο Μ. Καΐλα & Α. Κατσίκης (επιμ.), Εκπαίδευση για το περιβάλλον και την αειφόρο ανάπτυξη: νέα δεδομένα και προσανατολισμοί, Αθήνα: Ατραπός, 723-754.

Bauman, Z. (1999) Moderne und Ambivalenz. In U. Bielefeld (Hg.) Das Eigene und das Fremde: Neuer rassismus in der Alten Welt? Hamburg: Hamburger Edition, 23-50.

Scardamalia, M. & C. Bereiter (1987) Knowledge telling and knowledge transforming in written composition. In S. Rosenberg (Ed.), Advances in applied psycholinguistics. Cambridge: Cambridge University Press, Vol.1, 142-174.

Δ) Αναφορές σε αδημοσίευτο υλικό

Δέδε, Κ. (2006) Διγλωσσία: Η περίπτωση της φωνημικής συνειδητοποίησης στην προσχολική ηλικία. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή, Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Ε) Αναφορές σε αναδημοσιευμένο υλικό

Fishman, J.A. (1965) Who speaks what language to whom and when? La Linguistique 2:67-88. Reprinted in Li Wei (ed.) (2007) The Bilingualism Reader. London and New York: Routledge, 2nd ed., 55-70.

Στ) Αναφορές σε πηγές στο διαδίκτυο

Rossetti, R. (1998) A teacher journal: Tool for self-development and syllabus design [on line]. Available: journal. html http://www.geocities.com/Athens/Olympus/9260/journal.html. [ημερομηνία πρόσβασης]

Ζ) Αναφορές σε άρθρα εφημερίδων και περιοδικών

Θα πρέπει να αναγράφεται το όνομα της εφημερίδας, η ημερομηνία/χρονολογία έκδοσης και ο τίτλος του άρθρου.

Η) Αναφορές σε επίσημες εκθέσεις και έγγραφα

Department for Education and Skills (2002) Supporting pupils learning English as an Additional Language, DfES 0239/2002, www.standards.dfes.gov.uk

Eyrudice-Unité européenne (2004) L' intégration scolaire des enfants immigrants en Europe, www.Eurydice.org.

Όσοι υποβάλλουν άρθρα για δημοσίευση παρακαλούνται να ακολουθούν τις υποδείξεις που αναφέρονται παραπάνω, διότι διαφορετικά δε θα μπορέσει να κινηθεί η διαδικασία κρίσης της εργασίας τους.

ISSN 1109-8740